



CHAPITRE 4

Théorèmes de Rolle, des A.F. & I.A.F.

Extremums et théorème de Fermat, théorème de Rolle, théorème et inégalité des accroissements finis, applications à la monotonie, aux inégalités et au calcul de limites — cours détaillé, méthodes, exercices corrigés.

Sommaire du chapitre

CHAPITRE 4 — Théorèmes de Rolle, des A.F. & I.A.F.	1
1. Extremums d'une fonction	3
2. Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis	4
3. Applications	6

Corrections des exercices, fiche de révision, QCM et exercices du chapitre font l'objet de documents séparés.

« Les mathématiques ne sont pas faites pour comprendre le monde, mais pour apprendre à penser. » — Henri Poincaré

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Extremums d'une fonction

Définition — Extremums globaux et locaux

Soient f définie sur I et $x_0 \in I$.

- (1) f admet un **maximum global** (absolu) en x_0 si $\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$.
 - (2) f admet un **maximum local** (relatif) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 tel que $\forall x \in J, f(x) \leq f(x_0)$.
 - (3) f admet un **minimum global** en x_0 si $\forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)$.
 - (4) f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 tel que $\forall x \in J, f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un **extremum** en x_0 si elle y admet un maximum ou un minimum.

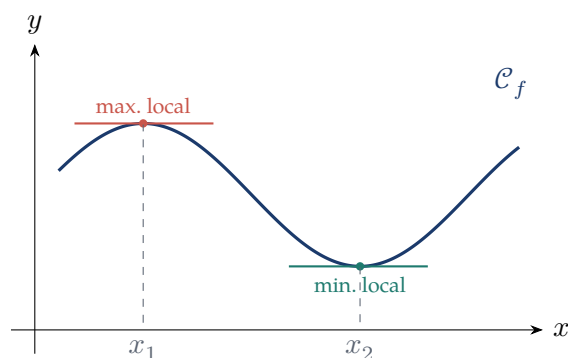


Figure 1. Extremums locaux : la tangente y est horizontale.

Théorème — Théorème de Fermat — condition nécessaire

Soient f définie sur I et $x_0 \in I$. Si :

- (1) x_0 est un point **intérieur** à I (par exemple I ouvert) ;
 - (2) f admet un **extremum local** en x_0 ;
 - (3) f est **dérivable** en x_0 ;
- alors $f'(x_0) = 0$.

Piège à éviter — La réciproque est fausse

$f'(x_0) = 0$ n'entraîne pas que f ait un extremum en x_0 . *Contre-exemple* : $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, mais f est strictement croissante et n'a aucun extremum en 0.

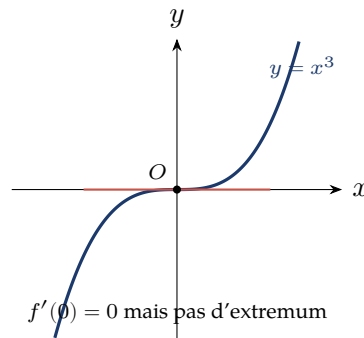


Figure 2. Point critique sans extremum ($x \mapsto x^3$).

Définition — Point critique

Soient f dérivable en $x_0 \in I$. Si $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un **point critique** de f .

Remarque

Sur un intervalle *ouvert*, tout extremum local d'une fonction dérivable est un point critique; la réciproque est fausse (un point critique n'est pas toujours un extremum).

2. Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Théorème — Théorème de Rolle

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si :

- (1) f est **continue** sur $[a, b]$;
 - (2) f est **dérivable** sur $]a, b[$;
 - (3) $f(a) = f(b)$;
- alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

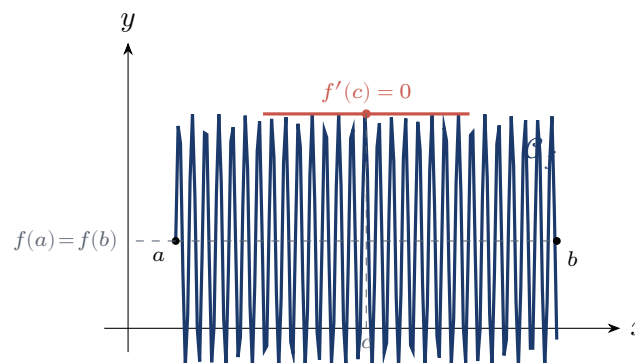


Figure 3. Théorème de Rolle : une tangente horizontale entre deux valeurs égales.

Méthode — Utiliser Rolle pour localiser une racine de f'

Repérer deux points où f prend la **même valeur** (souvent deux racines de f); vérifier continuité et dérivabilité; conclure à l'existence d'un zéro de f' entre eux. En répétant, on localise plusieurs zéros de f' .

Exercice 1 — Rolle : racines de f'

★★★★ Exercice du cours

Soient $a < b < c < d$ quatre réels et $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet trois racines réelles distinctes.

Théorème — Théorème des accroissements finis (T.A.F.)

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si :

(1) f est **continue** sur $[a, b]$;

(2) f est **dérivable** sur $]a, b[$;

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Remarque

Géométriquement, il existe un point où la **tangente** est parallèle à la **corde** joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Le théorème de Rolle est le cas particulier $f(a) = f(b)$.

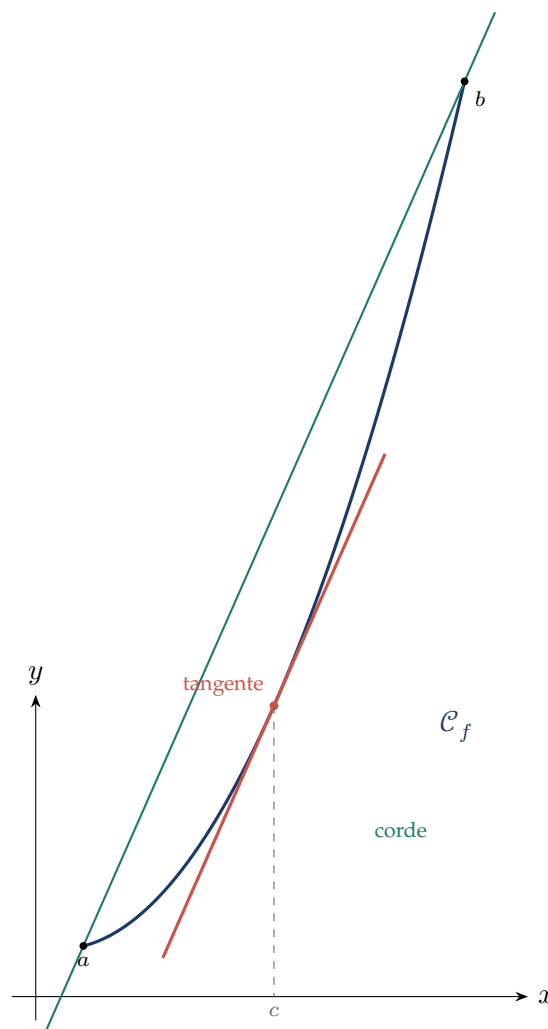


Figure 4. T.A.F. : la tangente en c est parallèle à la corde.

Exercice 2 — T.A.F. : une inégalité sur arctan

★★☆☆ Exercice du cours

Montrer que $\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} < \arctan x$.

Théorème — Inégalité des accroissements finis (I.A.F.)

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si :

- (1) f est **dérivable** sur I ;
- (2) il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$;
alors $\forall a, b \in I, |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$.

Remarque

La condition $a < b$ n'est pas nécessaire (l'inégalité est symétrique en a, b). L'I.A.F. exprime que f est M -lipschitzienne sur I .

Exercice 3 — I.A.F. : $|\sin x| \leq |x|$

☆☆☆ Exercice du cours

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

3. Applications

Théorème — Monotonie et signe de la dérivée

Soit f dérivable sur l'intervalle I .

- (1) f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
 - (2) f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
 - (3) f est constante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) = 0$.
- De plus, si $f' > 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points), alors f est *strictement* croissante.

Astuce — Prouver une identité $\varphi(x) = \text{cste}$

Montrer $\varphi' = 0$ sur un **intervalle**, puis évaluer φ en un point commode. C'est une conséquence directe du point (3) ci-dessus (lui-même issu du T.A.F.).

Exercice 4 — Identité $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

☆☆☆ Exercice du cours

1. Montrer que $\forall x > 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que $\forall x < 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 — Une fonction constante ($\arctan$)

☆☆☆ Exercice du cours

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \frac{1}{2} \arctan x$.

1. Étudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.