

Mathématiques — Terminale

---

# Continuité

## d'une fonction numérique réelle

---

Professeur : R. ABED

Année scolaire 2025 – 2026

## Paroles de mathématiciens

---

*« Il en est des mathématiques comme de toute autre science ; chaque génération recueille le fruit des efforts accumulés par celles qui l'ont précédée. La continuité de l'effort est la condition de la continuité du progrès. »*

— Henri Poincaré

*« Quand les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, les valeurs correspondantes de la fonction s'approchent également d'une autre valeur fixe : la fonction est alors continue. »*

— Augustin-Louis Cauchy

*« Il n'est pas nécessaire de faire appel à l'intuition pour comprendre la notion de continuité d'une fonction. On peut la définir rigoureusement à l'aide de la relation entre les valeurs des variables. »*

— Karl Weierstrass

*« La continuité exprime l'idée que des changements infinitésimaux dans l'entrée d'une fonction produisent des changements infinitésimaux dans la sortie. »*

— Richard Courant & Fritz John

# Chapitre 1

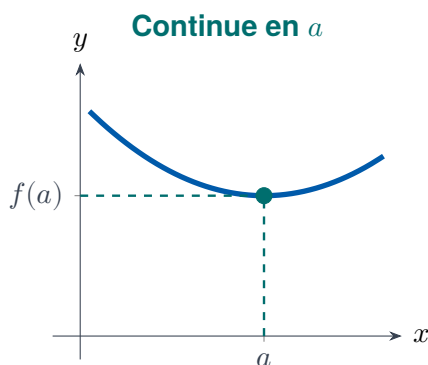
## Continuité d'une fonction numérique réelle

### 1.1 La continuité en un point

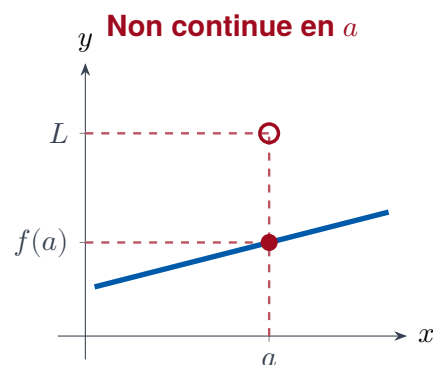
#### Définition 1

Soient  $f$  une fonction définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On dit que la fonction  $f$  est **continue** en  $a$  si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \checkmark$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a) \quad \times$$

FIG. 1.1 : Continuité (gauche) et discontinuité par saut (droite) en un point  $a$

**Exemple 1** La fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est continue en  $x_0 = 1$ , car :  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1 = f(1)$ .

**Exercice 1** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} & \text{si } x \neq 2 \\ \alpha & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue en 2.

### 1.1.1. Opérations sur les fonctions continues

#### Théorème 1 — Opérations algébriques

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues en  $a$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1.  $f + g$  est continue en  $a$ .
2.  $f \times g$  est continue en  $a$ .
3.  $\lambda \cdot f$  est continue en  $a$ .
4. Si  $g(a) \neq 0$ , alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues en  $a$ .
5. Si  $f \geq 0$  au voisinage de  $a$ , alors  $\sqrt{f}$  est continue en  $a$ .

### 1.1.2. Continuité à droite et à gauche

#### Définition 2

Soit  $f$  définie sur  $I$ ,  $a \in I$ .

- **Continue à droite** en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .
- **Continue à gauche** en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

#### Théorème 2 — Caractérisation

$$f \text{ continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

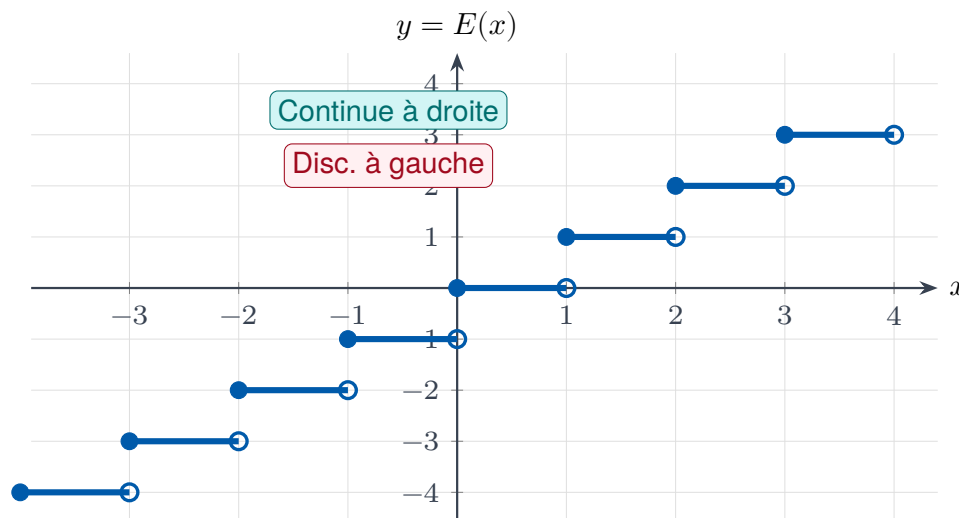
#### Définition 3 — Fonction partie entière

La **fonction partie entière** notée  $E(x) = \lfloor x \rfloor$  est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} : E(x) = n \iff n \leq x < n + 1$$

#### Proposition 1

La fonction partie entière  $E$  est continue à droite en tout entier, mais **n'est pas continue** en tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ .

FIG. 1.2 : Graphe de la fonction partie entière  $E(x) = [x]$ 

### 1.1.3. Continuité sur un intervalle

#### Définition 4

$f$  est **continue sur un intervalle**  $I$  si elle est continue en chaque point de  $I$  (avec continuité à droite aux extrémités gauches fermées, et à gauche aux extrémités droites fermées).

#### Récapitulatif — Continuité sur un intervalle

| Intervalle     | Condition                                                  |
|----------------|------------------------------------------------------------|
| $]a, b[$       | Continue en tout point de $]a, b[$                         |
| $[a, b[$       | Continue sur $]a, b[$ et continue à droite en $a$          |
| $]a, b]$       | Continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en $b$          |
| $[a, b]$       | Continue sur $]a, b[$ , à droite en $a$ et à gauche en $b$ |
| $[a, +\infty[$ | Continue sur $]a, +\infty[$ et continue à droite en $a$    |
| $\mathbb{R}$   | Continue en tout point de $\mathbb{R}$                     |

#### Théorème 3 — Fonctions usuelles

1. Les **polynômes** sont continus sur  $\mathbb{R}$ .
2. Les **fractions rationnelles** sont continues sur leur domaine de définition.
3.  $\sin$  et  $\cos$  sont continus sur  $\mathbb{R}$ .
4.  $\tan$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
5.  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

### 1.1.4. Exercices types avec corrections

**Exercice 2** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - x \sin(3x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{7}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ .

#### Correction — Exercice 2

Pour  $x \neq 0$  :

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} - 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}$$

D'après les limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2} = f(0)$ . **Conclusion :**  $f$  est continue en 0.  $\square$

**Exercice 3** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ bx + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

#### Correction — Exercice 3

**En  $x = 1$  (cont. à gauche) :**  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a$  et  $f(1) = 2(1) - 3 = -1$ . Donc

$$1 + a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -2}.$$

**En  $x = 3$  (cont. à droite) :**  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (bx + 1) = 3b + 1$  et  $f(3) = 2(3) - 3 = 3$ . Donc

$$3b + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{3}}.$$

### 1.1.5. Composée des fonctions continues

#### Théorème 4 — Continuité de la composée

Si  $f$  est continue en  $a$  et  $g$  est continue en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a))$$

**Théorème 5 — Sur un intervalle**

Si  $f$  est continue sur  $I$ ,  $f(I) \subset J$  et  $g$  est continue sur  $J$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

## 1.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

**Théorème 6**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Théorème 7 — Image d'un segment**

L'image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue est un segment  $[m, M]$ , où  $m = \min_{[a,b]} f$  et  $M = \max_{[a,b]} f$ .

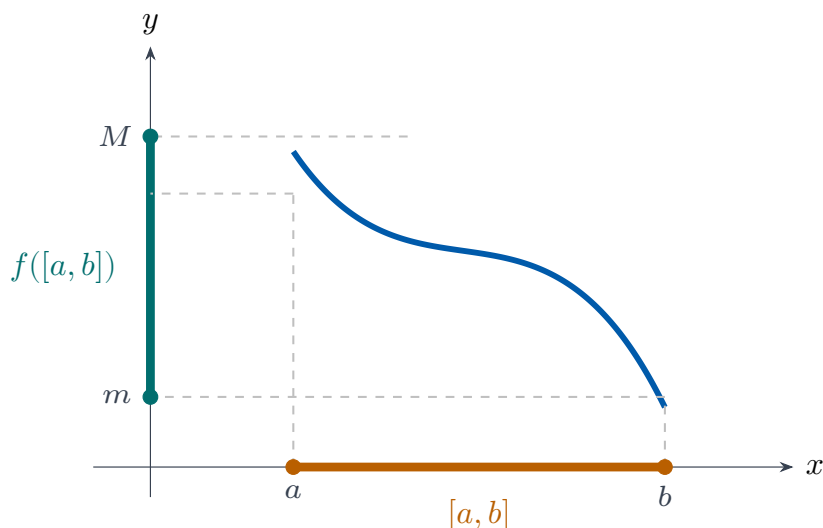


FIG. 1.3 : Image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue :  $f([a, b]) = [m, M]$

**Théorème 8 — Image par une fonction strictement monotone**

| Intervalle      | $f$ croissante                  | $f$ décroissante                |
|-----------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $[a, b]$        | $[f(a), f(b)]$                  | $[f(b), f(a)]$                  |
| $[a, +\infty[$  | $[f(a), \lim_{+\infty} f[$      | $] \lim_{+\infty} f, f(a)]$     |
| $] -\infty, b]$ | $] \lim_{-\infty} f, f(b)]$     | $[f(b), \lim_{-\infty} f[$      |
| $]a, b[$        | $] \lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$ | $] \lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f[$ |

## 1.3 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

**Théorème 9 — TVI**

Soit  $f$  **continue** sur  $[a, b]$  et  $\gamma$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Alors il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que :

$$f(c) = \gamma$$

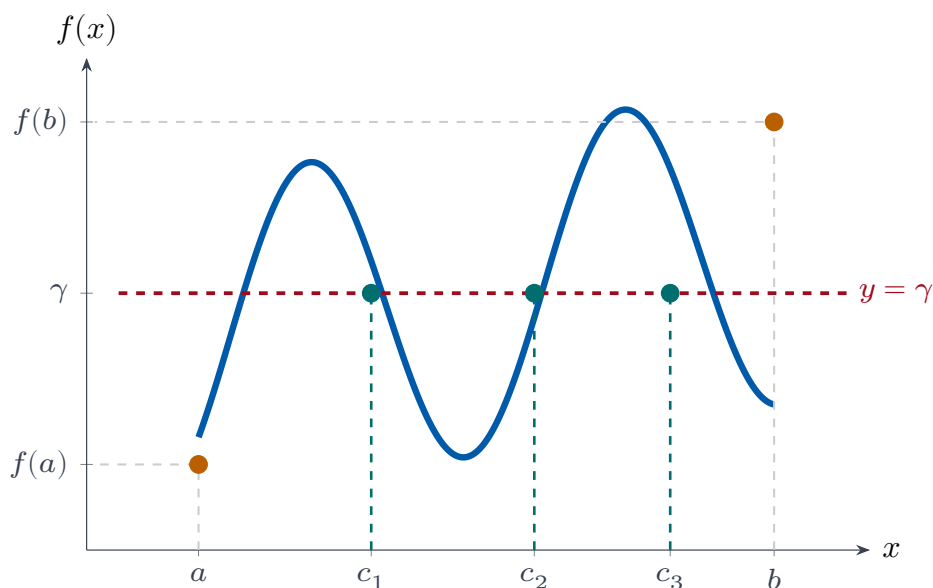


FIG. 1.4 : TVI : la droite  $y = \gamma$  coupe la courbe en au moins un point

**Corollaire 1**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et  $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ , alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

**Corollaire 2**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$  et  $f$  est **strictement monotone**, alors il existe un **unique**  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .

**Exercice 4** Montrer que les équations suivantes admettent au moins une solution dans  $I$ .

1.  $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ ,  $I = [1, 3]$ .
2.  $2 \cos x - x = 0$ ,  $I = [0, \pi]$ .

**Exercice 5** Montrer que  $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$  admet une unique solution dans  $[-2, 0]$ .



### 1.3.1. Méthode de la dichotomie

#### Algorithme de dichotomie

**Données :**  $f$  continue sur  $[a, b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , précision  $\varepsilon > 0$ .

**Étape 1.** Poser  $a_0 = a, b_0 = b$ .

**Étape 2.** Tant que  $b_n - a_n > \varepsilon$  :

- $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  (milieu).
- Si  $f(a_n) \cdot f(m_n) \leq 0$  :  $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m_n$ .
- Sinon :  $a_{n+1} = m_n, b_{n+1} = b_n$ .

**Étape 3.**  $\alpha \approx m_n$  à la précision  $\varepsilon$ .

**Exercice 6** Soit  $\alpha$  la solution unique de  $x^3 - 12x + 17 = 0$  sur  $\mathbb{R}$ . Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près par dichotomie.

## 1.4 Théorème de la bijection

### Définition 5 — Bijection

$f : I \rightarrow J$  est une **bijection** de  $I$  dans  $J$  si tout élément de  $J$  admet un **unique** antécédent dans  $I$ .

### Théorème 10 — Théorème de la bijection

Si  $f$  est **continue** et **strictement monotone** sur  $I$ , alors  $f$  est une **bijection** de  $I$  dans  $f(I)$ .

### 1.4.1. Bijection réciproque

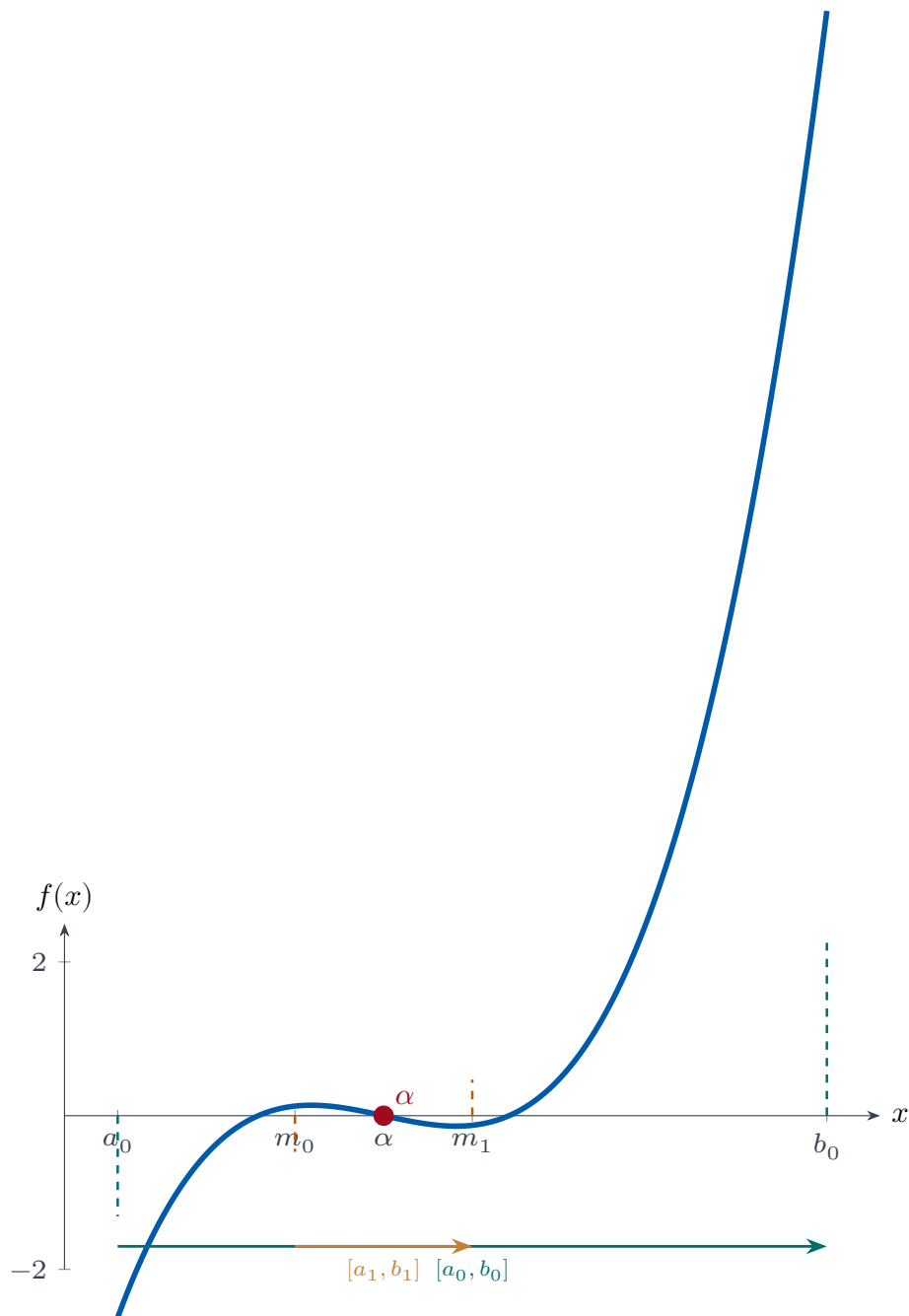
#### Théorème 11 — Propriétés de $f^{-1}$

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  :

1. est **continue** sur  $J = f(I)$ ,
2. a le **même sens de variation** que  $f$ ,
3. a pour courbe le symétrique de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $y = x$ .

**Exercice 7** Soit  $f(x) = x^2 - 2x$  sur  $] -\infty, 1]$ .

1. Montrer que  $f$  est une bijection vers  $J$  à déterminer.

FIG. 1.5 : Principe de la dichotomie : encadrement successif de la racine  $\alpha$

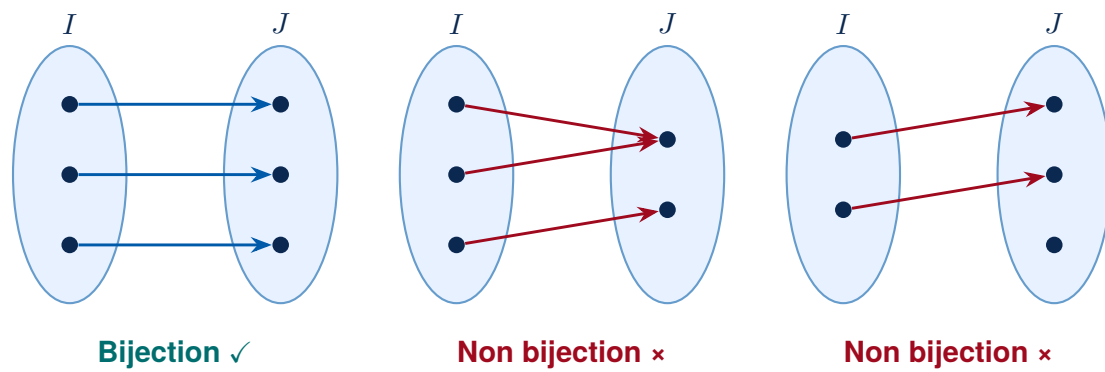
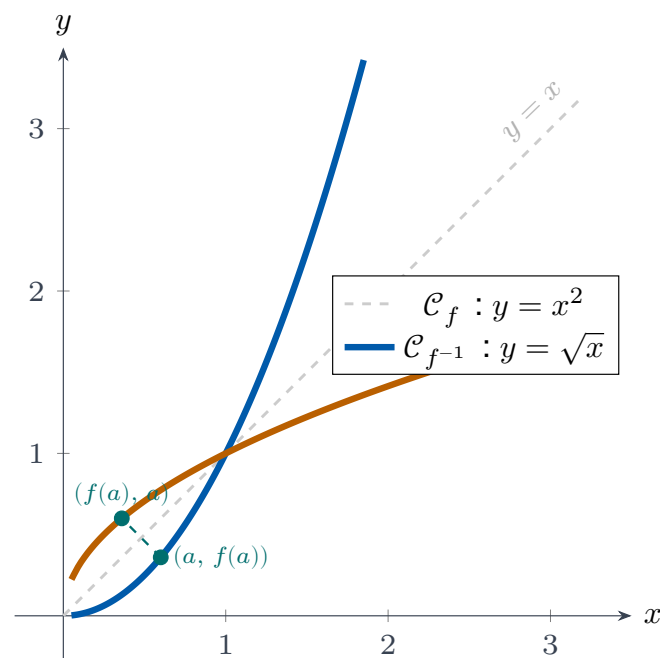


FIG. 1.6 : Bijection et non-bijection


 FIG. 1.7 : Symétrie de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  par rapport à  $y = x$

2. Tracer  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  dans un repère orthonormal.

## 1.5 Fonctions racines $n$ -ièmes et puissances rationnelles

### Définition 6 — Racine $n$ -ième

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la **fonction racine  $n$ -ième** est la bijection réciproque de  $x \mapsto x^n$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  :

$$\sqrt[n]{\phantom{x}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n$$

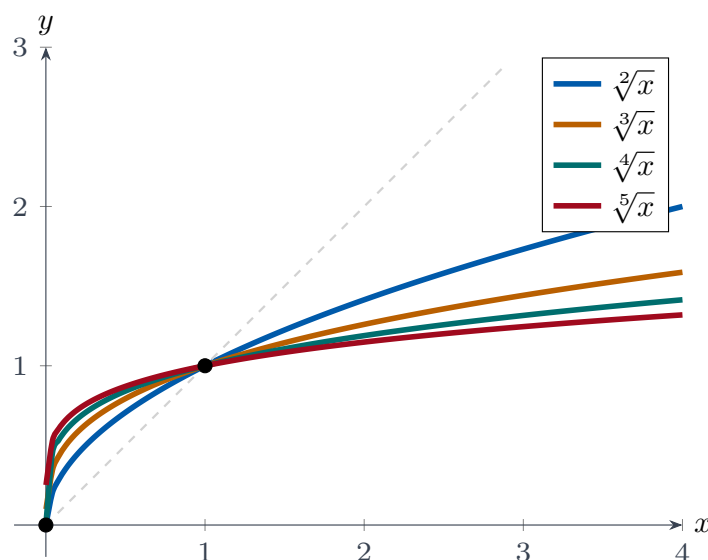


FIG. 1.8 : Fonctions racines  $n$ -ièmes ( $n = 2, 3, 4, 5$ )

### Proposition 2 — Propriétés

1.  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
2.  $(\sqrt[n]{x})^n = x$  et  $\sqrt[n]{x^n} = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .
3.  $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ ,  $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x} / \sqrt[n]{y}$ .
4.  $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$ .

### Définition 7 — Puissance rationnelle

Pour  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$x^r = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

**Proposition 3 — Règles de calcul**

1.  $(xy)^r = x^r \cdot y^r$

4.  $x^r \cdot x^{r'} = x^{r+r'}$

2.  $(x/y)^r = x^r / y^r$

5.  $x^r / x^{r'} = x^{r-r'}$

3.  $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$

6.  $x^{-r} = 1/x^r$

**Exercice 8** Écrire sous forme d'une puissance :

$$A = \frac{\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt[4]{7^3} \times \sqrt[5]{7^4}}{(\sqrt[6]{7^5})^2}$$

**Exercice 9** Simplifier :

$$A = \frac{\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$$

**Exercice 10** Comparer :  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[4]{4}$  et  $\sqrt[15]{15}$ .