



MATHS ÉLITES

2ème année Baccalauréat — Sciences Mathématiques • Année scolaire 2026 / 2027

Énoncé — Différence de deux arctangentes

Problème : quatre démonstrations de la formule, puis applications

Auteur : R. Abed — Agrégé de Math.

Chapitre : Limites et continuité

Rappel — outils disponibles

- ◆ $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la bijection réciproque de la restriction de $\tan$ à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: y = \arctan x \iff (\tan y = x \text{ et } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
- ◆ $\arctan$ est continue, impaire, strictement croissante; $\lim_{\pm\infty} \arctan = \pm\frac{\pi}{2}$; $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.
- ◆ Pour tout $x > 0$: $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$; par conséquent $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u} = 1$.

Problème — La formule de soustraction des arctangentes

Dans tout le problème, a et b sont deux réels tels que $ab \neq -1$. On pose

$$\alpha = \arctan a, \quad \beta = \arctan b, \quad \theta = \alpha - \beta, \quad w = \frac{a - b}{1 + ab}.$$

L'objectif est de démontrer, de quatre façons différentes, la formule

$$(\mathcal{F}) \quad \arctan a - \arctan b = \begin{cases} \arctan w & \text{si } ab > -1, \\ \arctan w + \pi & \text{si } ab < -1 \text{ et } a > 0, \\ \arctan w - \pi & \text{si } ab < -1 \text{ et } a < 0, \end{cases}$$

puis de l'appliquer.

Partie A — Démonstration par la trigonométrie

- 1) Justifier que $\alpha, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, que $\cos \alpha > 0$, $\cos \beta > 0$, que $\sin \alpha = a \cos \alpha$ et $\sin \beta = b \cos \beta$, puis que $-\pi < \theta < \pi$.
- 2) Montrer que $\cos \theta = \cos \alpha \cos \beta (1 + ab)$ et $\sin \theta = \cos \alpha \cos \beta (a - b)$.
En déduire que $\cos \theta \neq 0$, que $\cos \theta$ a le signe de $1 + ab$, et que $\tan \theta = w$.
- 3) On suppose $ab > -1$. Montrer que $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et conclure que $\theta = \arctan w$.
- 4) On suppose $ab < -1$.
 - (a) Montrer que a et b sont non nuls et de signes contraires.
 - (b) On suppose $a > 0$. Montrer que $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, puis que $\theta = \arctan w + \pi$.
 - (c) On suppose $a < 0$. Montrer que $\theta = \arctan w - \pi$.

Partie B — Démonstration à partir de la formule de la somme

On admet la formule du cours : pour $ab' \neq 1$, $\arctan a + \arctan b' = \arctan \frac{a + b'}{1 - ab'} + \varepsilon\pi$, avec $\varepsilon = 0$ si $ab' < 1$, $\varepsilon = 1$ si $ab' > 1$ et $a > 0$, $\varepsilon = -1$ si $ab' > 1$ et $a < 0$.

- 1) En posant $b' = -b$, exprimer $\arctan a - \arctan b$ à l'aide de $\arctan a + \arctan b'$.
- 2) Traduire les conditions $ab' \neq 1$, $ab' < 1$, $ab' > 1$ en fonction de ab , calculer $\frac{a + b'}{1 - ab'}$ et retrouver $(\mathcal{F})$.

Partie C — Démonstration par l'étude d'une fonction (après le chapitre Dérivabilité)

On fixe $b > 0$ et l'on pose, pour $x \neq -\frac{1}{b}$, $u(x) = \frac{x - b}{1 + bx}$ et $g(x) = \arctan x - \arctan u(x)$. On note $I_1 =]-\frac{1}{b}, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, -\frac{1}{b}[$.

- 1) Calculer $u'(x)$ et vérifier que $1 + u(x)^2 = \frac{(1 + x^2)(1 + b^2)}{(1 + bx)^2}$. En déduire que $(\arctan u)'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.
- 2) En déduire que g est constante sur I_1 et sur I_2 .
- 3) Calculer $g(b)$ et en déduire $(\mathcal{F})$ lorsque $ab > -1$ (avec $b > 0$).
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et en déduire $(\mathcal{F})$ lorsque $ab < -1$ (avec $b > 0$, donc $a < 0$).
- 5) Traiter le cas $b = 0$, puis le cas $b < 0$ en appliquant ce qui précède au couple $(-a, -b)$.

Partie D — Démonstration par les nombres complexes (après le chapitre Complexes)

- 1) Montrer que $1 + ia = \frac{1}{\cos \alpha}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et en déduire que $\arg(1 + ia) \equiv \alpha [2\pi]$. Établir de même que $\arg(1 - ib) \equiv -\beta [2\pi]$.
- 2) Écrire $z = (1 + ia)(1 - ib)$ sous forme algébrique et en déduire que $\arg z \equiv \theta [2\pi]$.
- 3) On suppose $1 + ab > 0$. Montrer que $\theta = \arctan w$.
- 4) On suppose $1 + ab < 0$. Retrouver $\theta = \arctan w \pm \pi$ selon le signe de a .
- 5) **Interprétation géométrique.** Dans un repère orthonormé, on considère $\vec{u}(1, a)$ et $\vec{v}(1, b)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\det(\vec{v}, \vec{u})$, et interpréter θ .

Partie E — Bilan

Comparer les quatre démonstrations : outils utilisés, longueur, moment de l'année où elles sont accessibles. Laquelle est la plus simple ?

Application 1 — Valeurs exactes et formule de Machin

- 1) Montrer que $\arctan 2 - \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$, puis que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
- 2) Montrer que $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$ et en déduire $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$.
- 3) **Formule de Machin (1706).** Montrer que $2 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{5}{12}$, puis $4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{120}{119}$, et enfin $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

Application 2 — Une équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\arctan(x+1) - \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}$.

Application 3 — Sommes télescopiques

- 1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \arctan(k+1) - \arctan k$. En déduire $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- 2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$. En déduire $T_n = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

Application 4 — Calcul de limites

- 1) **Lemme.** Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\arctan x - \arctan c}{x - c} = \frac{1}{1 + c^2}$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}{x}$.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right)$.
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\arctan(2x) - \arctan x)$.
- 5) Soit $\lambda > 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\arctan(x+\lambda) - \arctan x)$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\arctan(n+1) - \arctan n)$.

Application 5 — Une inégalité et la continuité

- 1) Montrer que pour tous réels $a, b \geq 0$: $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$.
- 2) En déduire, sans utiliser la continuité de $\arctan$, que $\lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}$.