


PLANCHE D'EXERCICES · 2^{ème} Bac Sciences Mathématiques

Calcul de limites & arctangente

Au-delà du modèle $\frac{f-g}{h}$ — neuf situations
**PLANCHE
N° 2**

Chapitre : **Limites et continuité**

Prérequis : **Planche Arctangente N° 1**

Durée conseillée : **3 h**

Professeur : **R. Abed**

Classe : _____

Nom & prénom : _____

Objectifs

- ◆ Adapter la décomposition à un quotient, à trois facteurs, à n facteurs.
- ◆ Exploiter une condition de finitude pour trouver un paramètre.
- ◆ Utiliser $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$ en 0 et en $+\infty$.
- ◆ Étudier limites latérales, suites, composées et compensations.

Niveaux de difficulté

- ★☆☆☆ application directe
- ★★☆☆ standard
- ★★★☆☆ approfondi
- ★★★★ niveau concours

Rappel de cours

Acquis de la planche Arctangente N° 1.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{\arctan x - \arctan c}{x - c} = \frac{1}{1 + c^2} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Si $f \rightarrow ab$, $g \rightarrow a$, $h \rightarrow b$, $k \rightarrow 0$ en x_0 : $f - gh = (f - ab) - h(g - a) - a(h - b)$.

Relation complémentaire : pour $x \neq 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

Exercice 1 — Trois facteurs

★★☆☆ **Classique**

1. Soient f, g, h, ℓ telles que $f \rightarrow abc$, $g \rightarrow a$, $h \rightarrow b$, $\ell \rightarrow c$ en x_0 . Vérifier que $f - gh\ell = (f - abc) - h\ell(g - a) - a\ell(h - b) - ab(\ell - c)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x \cdot \arctan(x^2) \cdot \arctan(x^3) - \frac{\pi^3}{64}}{x - 1}$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \arctan x)(1 + \arctan 2x)(1 + \arctan 3x) - 1}{x}$.

Exercice 2 — Un quotient au lieu d'un produit

★★☆☆ **Classique**

Soient f, g, h telles que $g \rightarrow a$, $h \rightarrow b$ avec $b \neq 0$, et $f \rightarrow \frac{a}{b}$ en x_0 .

1. Établir l'identité $f - \frac{g}{h} = \left(f - \frac{a}{b}\right) - \frac{g - a}{h} + \frac{a(h - b)}{bh}$.

$$2. \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \frac{\arctan(x^2)}{\arctan x}}{x - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\arctan(\sqrt{3}x)}{\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})} - 2}{x - 1}.$$

Exercice 3 — Paramètres et condition de finitude

★★★★ Important

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \frac{\alpha \arctan x - \sqrt{x} \arctan(x^2)}{x - 1}$.

(a) Montrer que si $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ est finie, alors $\alpha = 1$.

(b) Pour cette valeur, calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$.

2. Déterminer les réels α et β tels que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\alpha + \beta x) - \sqrt{1+x} \arctan(1+x)}{x} = \frac{1}{2}$.

Piège à éviter

Une limite $\frac{N(x)}{k(x)}$ avec $k \rightarrow 0$ ne peut être finie que si $N(x) \rightarrow 0$: c'est une condition **nécessaire**. Dans 2., elle donne $\arctan \alpha = \frac{\pi}{4}$, d'où la valeur de α par **injectivité** de $\arctan$.

Exercice 4 — Limites à gauche et à droite

★★★★ Original

1. Étudier l'existence de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x) - \frac{\pi}{4}}{|x|}$.

2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x}$. La fonction $x \mapsto \arctan \frac{1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

(b) À l'aide de la relation complémentaire, calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arctan \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}}{x}$.

Exercice 5 — En $+\infty$

★★★★ Important

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x \cdot \arctan(2x) - \frac{\pi^2}{4} \right)$.

Indication

Pour $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$: poser $t = \frac{1}{x}$ ($t \rightarrow 0^+$). Pour 2., décomposer $\arctan x \cdot \arctan 2x - \frac{\pi^2}{4}$ comme dans le modèle.

Exercice 6 — Version suites

★★★★ Classique

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $u_n = n \left(\arctan \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{\pi}{4} \right)$.

2. $v_n = n^2 (\arctan(n+1) - \arctan n)$.

On montrera d'abord que $\arctan(n+1) - \arctan n = \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$.

Exercice 7 — Composées

★★★★☆ Original

1. Soit u telle que $u(x) \rightarrow c$ et $\frac{u(x) - c}{x - x_0} \rightarrow \lambda$ en x_0 . Montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arctan u(x) - \arctan c}{x - x_0} = \frac{\lambda}{1 + c^2}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(\frac{4}{\pi} \arctan x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\frac{4}{\pi} \arctan x - 1}}{x - 1}$.

Exercice 8 — Quand les termes se compensent

★★★★☆ Important

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x \cdot \arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{16}}{x - 1}$. Expliquer le résultat à l'aide de la relation complémentaire.
2. Déterminer le réel λ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1 + \lambda x) - \sqrt[4]{1 + x} \arctan(1 + x)}{x} = 0$.

Remarque

En posant $s = \arctan x$, on a $\arctan x \cdot \arctan \frac{1}{x} = s(\frac{\pi}{2} - s)$ pour $x > 0$: cette quantité est maximale pour $s = \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $x = 1$. Une limite nulle traduit ici une « tangente horizontale ».

Exercice 9 — Produit de n facteurs

★★★★☆ Original

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + \arctan(kx)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^n \frac{4}{\pi} \arctan(x^k) \quad (x > 0).$$

1. Vérifier que $P_{n+1} - 1 = (P_n - 1)(1 + \arctan((n+1)x)) + \arctan((n+1)x)$.
2. En déduire, par récurrence, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_n(x) - 1}{x} = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Par une méthode analogue, montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{Q_n(x) - 1}{x - 1} = \frac{n(n+1)}{\pi}$.

Remarque

Dans P_n , le facteur d'indice k « apporte » exactement k à la limite ; dans Q_n , il apporte $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{k}{2} = \frac{2k}{\pi}$. On retrouve dans les deux cas la somme $1 + 2 + \dots + n$.