


PLANCHE D'EXERCICES · 2^{ème} Bac Sciences Mathématiques

Calcul de limites & arctangente

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ du type $\frac{f-g}{h}$ — 20 limites & un modèle

PLANCHE
N° 1

Chapitre : Limites et continuité

Prérequis : arctan, racines n -ièmes

Durée conseillée : 2 h

Professeur : R. Abed

Classe : _____

Nom & prénom : _____

Objectifs

- Établir les limites de référence $\frac{\arctan u}{u}$ et $\frac{\arctan x - \arctan c}{x - c}$.
- Décomposer le numérateur $f - gh$ pour faire apparaître des taux d'accroissement.
- Combiner arctangente, racines n -ièmes et polynômes.
- Traiter un dénominateur du type $\arctan x$ ou $\arctan x - \frac{\pi}{4}$.

Niveaux de difficulté

- ☆☆☆☆ application directe
- ☆☆☆☆ standard
- ☆☆☆☆ approfondi
- ☆☆☆☆ niveau concours

Rappel de cours

La fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est continue, impaire et strictement croissante; $\arctan 0 = 0$, $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

◆ **Encadrement** : pour tout $x > 0$, $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$.

◆ **Formule de soustraction** : si $ab > -1$, alors $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$.

◆ **Racines n -ièmes** : $\lim_{u \rightarrow c} \frac{\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{c}}{u - c} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{c})^{n-1}}$ pour $c > 0$ (planche « racines n -ièmes »).

Exercice 1 — Le modèle général et les lemmes fondamentaux

☆☆☆☆ Important

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et f, g, h, k définies au voisinage de x_0 , k ne s'annulant pas au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0), avec $f \rightarrow ab$, $g \rightarrow a$, $h \rightarrow b$, $k \rightarrow 0$ en x_0 . On pose $\varphi(x) = \frac{f(x) - g(x)h(x)}{k(x)}$.

1. Vérifier que $f - gh = (f - ab) - h(g - a) - a(h - b)$ et en déduire que, si les limites $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f-ab}{k}$, $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g-a}{k}$, $\ell_3 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h-b}{k}$ existent (finies) en x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \ell_1 - b\ell_2 - a\ell_3$.

2. À l'aide de l'encadrement et de l'impairité de $\arctan$, montrer que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u} = 1$.

3. **Lemme fondamental.** Soit $c \in \mathbb{R}$.

(a) Justifier que $1 + cx > 0$ pour x voisin de c , puis que $\arctan x - \arctan c = \arctan \frac{x-c}{1+cx}$.

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\arctan x - \arctan c}{x - c} = \frac{1}{1+c^2}$.

4. Soient $\alpha \neq 0$ et β réels. Déterminer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arctan(\alpha x + \beta) - \arctan(\alpha x_0 + \beta)}{x - x_0}$.

Méthode — stratégie pour $\frac{f-gh}{k}$ avec arctangente

1. Calculer les limites de f, g, h en x_0 (valeurs remarquables de arctan) pour identifier a, b et vérifier que $f \rightarrow ab$.
2. Écrire le numérateur sous la forme $(f - ab) - h(g - a) - a(h - b)$.
3. Pour un terme $\arctan(u(x)) - \arctan c$, écrire $\frac{\arctan u(x) - \arctan c}{u(x) - c} \times \frac{u(x) - c}{x - x_0}$.
4. Si k n'est pas de la forme $x - x_0$, écrire $\varphi = \frac{f - gh}{x - x_0} \times \frac{x - x_0}{k}$ et traiter $\frac{k}{x - x_0}$ à part.

Exercice 2 — Dix limites pour s'entraîner

★★☆☆ Classique

Calculer les limites suivantes.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x) - \sqrt{1+x} \arctan x}{x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x^3) - x \arctan x}{x^2 - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x) - (1+x) \arctan(2x)}{x}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \arctan x}{\sqrt{x} - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - x \arctan \sqrt{x}}{x - 1}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+3x) - \sqrt{1+2x} \arctan(1+x)}{\arctan x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x^2) - \sqrt{x} \arctan x}{x - 1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x^2) - \sqrt{x} \arctan \sqrt{x}}{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x) - \sqrt[3]{1+x} \arctan(1+2x)}{x}$

10) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arctan(x^3) - x^2 \arctan x}{x + 1}$

Piège à éviter
 $\arctan(x^2) \neq (\arctan x)^2$ et $\arctan(1+x) \neq \frac{\pi}{4} + \arctan x$: l'arctangente n'est **ni multiplicative, ni additive**. Pour les limites 1) et 2), on a $a b = 0$: il suffit d'écrire $\arctan(u) = \frac{\arctan u}{u} \times u$.

Astuce — dénominateurs en arctangente

Dans 8), $\frac{\arctan x}{x} \rightarrow 1$; dans 9), $\frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} \rightarrow \frac{1}{2}$ d'après le lemme fondamental. Dans 10), l'impairité de arctan donne les valeurs en -1 .

Exercice 3 — Cas où $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

★★★★ Important

Dans chacun des cas suivants, identifier a et b (on vérifiera que $a \neq b$, $a, b \neq 1$ et $f \rightarrow ab$), puis calculer la limite.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \arctan(x^3) - \sqrt{x+3} \arctan x}{x-1}$

6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \arctan(x^3) - \sqrt{x+5} \arctan x}{x+1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arctan(1+x) - \sqrt[3]{27+x} \arctan \sqrt{1+x}}{x}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(\sqrt{3}x) - \sqrt{x+3} \arctan \frac{x^2}{\sqrt{3}}}{x^2-1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \arctan \frac{x}{2} - x^2 \arctan(x-1)}{x-2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan(1+2x) - \sqrt{4+x} \arctan(1+x)}{\arctan x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}}{x-1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \arctan \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+26} \arctan(x^2)}{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{3}+x) - \sqrt{4+x} \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}+x)}{x}$

10) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{4 \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} - (x^2+1) \arctan \frac{x^2}{3}}{x-\sqrt{3}}$

Indication

Ici, l'une des deux limites a ou b est un multiple de π ($\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$...) et l'autre un entier (2, 3, 4). Dans 4), 5) et 7), on a $ab = \frac{\pi}{3} = \arctan \sqrt{3}$. Dans 10), le lemme fondamental s'applique en $c = 1$ après avoir écrit $\frac{x}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4 — Concevoir sa propre limite

★★★★ Original

1. Déterminer le réel p pour que, en $x_0 = 0$, les fonctions $f(x) = p \arctan \sqrt{1+x}$, $g(x) = \sqrt{4+x}$ et $h(x) = \arctan(1+x)$ vérifient $f \rightarrow ab$ avec $a = \lim g$ et $b = \lim h$.

2. Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)h(x)}{x}$.

3. Déterminer le réel λ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+\lambda x) - \sqrt{1+x} \arctan(1+x)}{x} = 0$.

Remarque

Le lemme fondamental dit que la courbe de $\arctan$ admet en tout point c une « pente » égale à $\frac{1}{1+c^2}$: c'est la dérivée $\arctan'(c)$, que l'on retrouvera dans le chapitre *Dérivabilité*.