

PLANCHE D'EXERCICES · 2^{ème} Bac Sciences MathématiquesCalcul de limites & racines n -ièmesAu-delà du modèle $\frac{f - gh}{k}$ — neuf situationsPLANCHE
N° 2

Chapitre : Limites et continuité

Prérequis : Planche N° 1 (modèle et lemme)

Durée conseillée : 3 h

Professeur : R. Abed

Classe : _____

Nom & prénom : _____

Objectifs

- ◆ Adapter la décomposition à un quotient, à trois facteurs, à n facteurs.
- ◆ Exploiter une condition de finitude pour trouver un paramètre.
- ◆ Ramener une limite en $+\infty$ ou une limite de suite au modèle.
- ◆ Étudier limites latérales, racines emboîtées et compensations.

Niveaux de difficulté

- ★☆☆☆ application directe
- ★★☆☆ standard
- ★★★☆☆ approfondi
- ★★★★ niveau concours

Rappel de cours

Acquis de la planche N° 1. Pour $n \geq 2$ et $c > 0$: $\lim_{u \rightarrow c} \frac{\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{c}}{u - c} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{c})^{n-1}}$.

Si $f \rightarrow ab$, $g \rightarrow a$, $h \rightarrow b$ et $k \rightarrow 0$ en x_0 , alors $f - gh = (f - ab) - h(g - a) - a(h - b)$ et, sous réserve d'existence des limites,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f - gh}{k} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f - ab}{k} - b \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g - a}{k} - a \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h - b}{k}.$$

Une racine n -ième d'un réel négatif n'est pas définie : toutes les racines de cette planche portent sur des quantités positives au voisinage du point considéré.

Exercice 1 — Trois facteurs

★★☆☆ Classique

1. Soient f, g, h, ℓ telles que $f \rightarrow abc$, $g \rightarrow a$, $h \rightarrow b$, $\ell \rightarrow c$ en x_0 . Vérifier que

$$f - gh\ell = (f - abc) - h\ell(g - a) - a\ell(h - b) - ab(\ell - c).$$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$ (on pourra aussi poser $x = t^{12}$).

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1728 + x} - \sqrt{4 + x} \sqrt[4]{81 + x} \sqrt[3]{8 + x}}{x}$.

Exercice 2 — Un quotient au lieu d'un produit

★★☆☆ Classique

Soient f, g, h telles que $g \rightarrow a$, $h \rightarrow b$ avec $b \neq 0$, et $f \rightarrow \frac{a}{b}$ en x_0 .

1. Établir l'identité $f - \frac{g}{h} = \left(f - \frac{a}{b}\right) - \frac{g - a}{h} + \frac{a(h - b)}{bh}$.

2. Calculer les limites suivantes.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - \frac{\sqrt{4+x}}{\sqrt[4]{1+x}}}{x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - \frac{\sqrt[3]{x+26}}{\sqrt{x+8}}}{x-1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \frac{\sqrt{x+14}}{\sqrt[3]{x+6}}}{x-2}$$

Exercice 3 — Paramètres et condition de finitude

★★☆☆ Important

1. Soit $\alpha > -1$. On pose $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x+\alpha} - \sqrt[3]{x}\sqrt{x+3}}{x-1}$.

(a) Montrer que si $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ est finie, alors $\alpha = 3$.

(b) Pour cette valeur, calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$.

2. Déterminer les réels $\alpha > 0$ et β tels que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\alpha+\beta x} - \sqrt{1+x}\sqrt{4+x}}{x} = \frac{1}{4}$.

Piège à éviter

Une limite de la forme $\frac{N(x)}{k(x)}$ avec $k \rightarrow 0$ ne peut être finie que si $N(x) \rightarrow 0$. C'est une condition **nécessaire** : elle donne une première équation, mais il faut ensuite calculer effectivement la limite.

Exercice 4 — Limites à gauche et à droite

★★☆☆ Original

1. Étudier l'existence de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1-x}-1}{|x|}$ (on calculera les limites à droite et à gauche).

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x-1}}$.

Indication

Dans 2., écrire $\frac{N(x)}{\sqrt{x-1}} = \frac{N(x)}{x-1} \times \sqrt{x-1}$ et utiliser la planche N° 1.

Exercice 5 — Version suites

★★☆☆ Classique

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \sqrt[4]{1 + \frac{2}{n}} \right)$.

2. $v_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - \sqrt{n} \sqrt{n+1}$.

Astuce — retour au modèle

Pour u_n , poser $x = \frac{1}{n}$: on a $x \rightarrow 0^+$ et $u_n = \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ où φ est une fonction du type $\frac{f-g}{x}$. Pour v_n , factoriser n sous chaque racine.

Exercice 6 — En $+\infty$: la forme $\infty - \infty$

★★★★☆ Important

Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x+5} \right).$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x^2+3x} - \sqrt{x} \sqrt{x+4} \right).$

Indication

Pour $x > 0$, $\sqrt{x} \sqrt{x+2} = x \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$. Mettre x en facteur dans chaque terme, puis poser $t = \frac{1}{x}$ ($t \rightarrow 0^+$) pour obtenir un quotient de la forme $\frac{f(t) - g(t)}{t}$.

Exercice 7 — Racines emboîtées

★★★★☆ Original

- Soit u une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = c > 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - c}{x - x_0} = \lambda$ (réel). Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{c}}{x - x_0} = \frac{\lambda}{n(\sqrt[n]{c})^{n-1}}.$$

- En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x+7} - 4}{x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{6 + \sqrt{4+x}} - \sqrt{1+x} \sqrt{4+x}}{x}$.

Exercice 8 — Quand les termes se compensent

★★★★☆ Important

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x+7}}{x - 1}$. Que remarque-t-on ?
- Déterminer le réel λ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\lambda x} \sqrt[3]{1-x} - \sqrt[4]{1+x}}{x} = 0$.

Remarque

Un résultat nul n'est pas un « échec » du calcul : il signifie que le numérateur tend vers 0 plus vite que $x - x_0$. Les deux fonctions ont, en x_0 , la même valeur et le même taux d'accroissement : leurs courbes y sont tangentes.

Exercice 9 — Produit de n facteurs

★★★★☆ Original

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x voisin de 0, on pose

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{1+kx} = (1+x) \sqrt{1+2x} \sqrt[3]{1+3x} \cdots \sqrt[n]{1+nx}, \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{1+x}.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_2(x) - 1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_3(x) - 1}{x}$.
2. Vérifier que $P_{n+1}(x) - 1 = (P_n(x) - 1)^{\sqrt[n+1]{1 + (n+1)x}} + (\sqrt[n+1]{1 + (n+1)x} - 1)$.
3. En déduire, par récurrence, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_n(x) - 1}{x} = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Par une méthode analogue, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q_n(x) - 1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Remarque

Chaque facteur $\sqrt[k]{1 + kx}$ « apporte » exactement 1 à la limite, quel que soit k : c'est ce qui rend le résultat de 3. si simple.