


PLANCHE D'EXERCICES · 2^{ème} Bac Sciences Mathématiques

Calcul de limites & racines n -ièmes

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ du type $\frac{f-g}{h}$ — 20 limites & un modèle

PLANCHE
N° 1

Chapitre : Limites et continuité

Prérequis : racines n -ièmes, limites usuelles

Durée conseillée : 2 h

Professeur : R. Abed

Classe : _____

Nom & prénom : _____

Objectifs

- Reconnaître une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ du type $\frac{f-g}{h}$.
- Décomposer le numérateur pour faire apparaître des taux d'accroissement.
- Utiliser l'identité $A^n - B^n$ (expression conjuguée) avec $\sqrt[n]{}$.
- Traiter un dénominateur lui-même irrationnel.

Niveaux de difficulté

- ☆☆☆☆ application directe
- ☆☆☆☆ standard
- ☆☆☆☆ approfondi
- ☆☆☆☆ niveau concours

Rappel de cours

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$; une racine n -ième d'un réel négatif **n'est pas définie**. Pour tous réels A, B :

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}) = (A - B) \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B^j.$$

Avec $A = \sqrt[n]{u}, B = \sqrt[n]{c}$ ($u \geq 0, c > 0$) : $\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{c} = \frac{u - c}{\sum_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{u})^{n-1-j} (\sqrt[n]{c})^j}.$

Exercice 1 — Le modèle général et le lemme fondamental

☆☆☆☆ Important

Soient $x_0 \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$ et f, g, h, k des fonctions définies au voisinage de x_0 , k ne s'annulant pas au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0), telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = ab, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} k(x) = 0.$$

On pose $\varphi(x) = \frac{f(x) - g(x)h(x)}{k(x)}.$

- Expliquer pourquoi le calcul de $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ conduit à une forme indéterminée.
- Vérifier que, pour tout x : $f(x) - g(x)h(x) = (f(x) - ab) - h(x)(g(x) - a) - a(h(x) - b).$
- On suppose que les limites suivantes existent et sont finies :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - ab}{k(x)}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - a}{k(x)}, \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - b}{k(x)}.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \ell_1 - b\ell_2 - a\ell_3.$

4. **Lemme fondamental.** Soient $n \geq 2$ et $c > 0$. À l'aide du rappel, montrer que

$$\lim_{u \rightarrow c} \frac{\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{c}}{u - c} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{c})^{n-1}}.$$

5. En déduire, pour $\alpha \neq 0$ et β tels que $\alpha x_0 + \beta > 0$, la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{\alpha x + \beta} - \sqrt[n]{\alpha x_0 + \beta}}{x - x_0}$.

Méthode — stratégie pour $\frac{f-gh}{k}$

1. Calculer les limites de f, g, h en x_0 pour identifier a, b et ab .
2. Écrire le numérateur sous la forme $(f - ab) - h(g - a) - a(h - b)$.
3. Ramener chaque morceau au lemme fondamental (taux d'accroissement d'une racine n -ième).
4. Si k n'est pas de la forme $x - x_0$, écrire $\varphi = \frac{f - gh}{x - x_0} \times \frac{x - x_0}{k}$ et traiter $\frac{k}{x - x_0}$ à part.

Exercice 2 — Dix limites pour s'entraîner

★★☆☆ Classique

Calculer les limites suivantes.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x}}{x - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x+7}}{x^2 - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt{x} \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt{9+x} \sqrt[4]{1+x}}{\sqrt{1+x} - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+5x} - \sqrt[3]{1+3x} \sqrt[4]{1-4x}}{x}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[3]{1+x} \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - \sqrt{1+x} \sqrt[4]{16+x}}{x}$

9) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+4} - \sqrt{x} \sqrt[4]{x-3}}{\sqrt{x} - 2}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt[3]{x-1} \sqrt{x+2}}{x - 2}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{7}{2}x} - \sqrt{1+x} \sqrt[3]{1+2x}}{x}$

Astuce — changement de variable

Dans 1) et 2), toutes les racines portent sur x : poser $x = t^{12}$ (resp. $x = t^{30}$), avec $t \rightarrow 1$, transforme la limite en un quotient de polynômes en t .

Piège à éviter

On ne remplace **jamais** $g(x)h(x)$ par sa limite ab « avant » le reste du calcul : c'est précisément l'écart $g(x)h(x) - ab$ qui contribue à la limite. Dans 10), les termes du premier ordre se compensent : il faut mener le calcul jusqu'au bout.

Exercice 3 — Cas où $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

★★★★ Important

Dans chacun des cas suivants, identifier a et b (on vérifiera que $a \neq b$ et $a, b \neq 1$), puis calculer la limite.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+35} - \sqrt{x+3} \sqrt[3]{x+26}}{x-1}$

6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+101} - \sqrt{x+5} \sqrt[3]{x+126}}{x+1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{216+x} - \sqrt[3]{8+x} \sqrt{9+x}}{x}$

7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+33} - \sqrt{x+1} \sqrt[3]{x+24}}{x^2-9}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x+1294} - \sqrt{x+2} \sqrt[3]{x+25}}{x-2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{216+5x} - \sqrt{4+x} \sqrt[4]{81+x}}{\sqrt{1+x}-1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+35} - \sqrt[3]{9-x} \sqrt{4x+5}}{x-1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+99} - \sqrt[3]{x+7} \sqrt{x+24}}{\sqrt[3]{x}-1}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{36+12x} - \sqrt[3]{27+x} \sqrt{4+x}}{x}$

10) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+32} - \sqrt{x} \sqrt[3]{x+23}}{\sqrt{x}-2}$

Indication

Dans 4), la fonction $g : x \mapsto \sqrt[3]{9-x}$ est **décroissante** : attention au signe du taux d'accroissement.
 Dans 7), factoriser $x^2 - 9$. Dans 8), 9) et 10), commencer par calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x)}{x - x_0}$.

Exercice 4 — Concevoir sa propre limite

★★★★ Original

- Déterminer des entiers naturels p et q pour que, en $x_0 = 0$, les fonctions $f(x) = \sqrt{p+x}$, $g(x) = \sqrt[3]{q+x}$ et $h(x) = \sqrt{9+x}$ vérifient les hypothèses de l'exercice 1 avec $a = 2$ et $b = 3$.
- Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)h(x)}{x}$.
- Déterminer le réel $\lambda > 0$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\lambda x} - \sqrt{1+x} \sqrt[4]{1+x}}{x} = 0$.

Remarque

Le résultat de l'exercice 1 se généralise : si f, g, h admettent en x_0 des « taux d'accroissement » finis, la limite de φ ne dépend que de ces taux et des valeurs a et b . Ce sera exactement la formule de dérivation d'un produit, $(gh)' = g'h + gh'$, étudiée dans le chapitre *Dérivabilité*.