



CHAPITRE 3

Dérivées réciproques & Primitives

Nombre dérivé, dérivée d'une réciproque, arctangente, racine n -ième, primitives et étude de fonctions — cours détaillé, méthodes, astuces et exercices corrigés.

Sommaire du chapitre

CHAPITRE 3 — Dérivées réciproques & Primitives	1
1. Dérivation d'une fonction : rappels et compléments	3
Dérivabilité et nombre dérivé en un point	3
Continuité, dérivées à droite et à gauche	4
Fonction dérivée, dérivées successives, opérations	4
2. Dérivée d'une fonction composée	4
3. Dérivée de la bijection réciproque	5
4. Dérivée de la fonction arctangente	6
5. Racine n -ième et puissances rationnelles	7
Tableau récapitulatif des dérivées	7
6. Fonctions primitives	8
Tableau des primitives usuelles	9
Primitives des formes composées	9
7. Étude des fonctions : compléments	10
Symétries et périodicité	10
Tangentes verticales, branches infinies	10
Convexité, concavité, point d'inflexion	10
8. Exercices du cours	11
Étude de fonctions (partie 8.4 du polycopié)	13

La fiche de révision et le QCM font l'objet de documents séparés.

1. Dérivation d'une fonction : rappels et compléments

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $x_0 \in I$.

1. Dérivabilité et nombre dérivé en un point

Définition — Nombre dérivé

f est **dérivable** en x_0 lorsque le taux d'accroissement admet une limite finie en x_0 . Cette limite, notée $f'(x_0)$, est le **nombre dérivé** de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Méthode — Lever l'indétermination $\frac{0}{0}$ d'un taux d'accroissement

Trois réflexes : (1) *factoriser* par $(x - x_0)$; (2) multiplier par la *quantité conjuguée* en présence de racines carrées; (3) poser $t = \sqrt[n]{x}$ pour les racines n -ièmes afin de retrouver une identité remarquable.

Interprétation géométrique. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la *sécante* (M_0M) . Quand $x \rightarrow x_0$, la sécante tend vers la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en M_0 , de pente $f'(x_0)$.

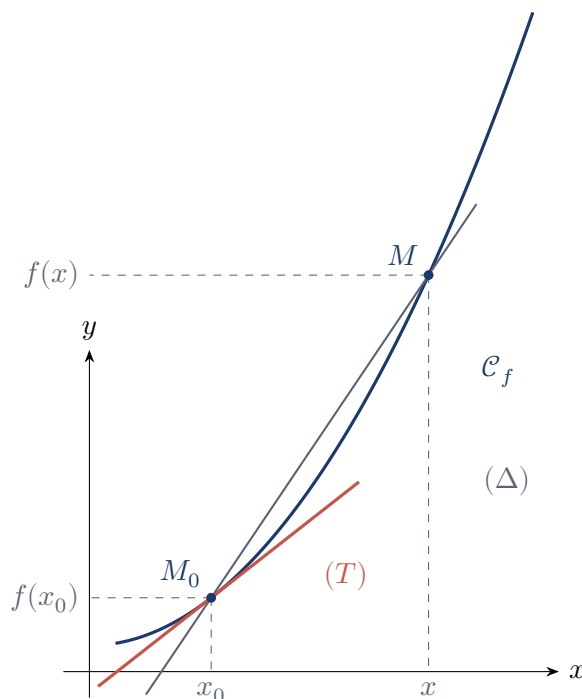


Figure 1. La pente de la tangente (T) est $f'(x_0)$.

Définition — Tangente et approximation affine

Si f est dérivable en x_0 , la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en M_0 a pour équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

d'où l'**approximation affine** pour h voisin de 0 : $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$.

Exemple — Approximation numérique

$\sqrt{1,02}$ avec $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $h = 0,02$: $f'(1) = \frac{1}{2}$, donc $\sqrt{1,02} \simeq 1 + \frac{1}{2}(0,02) = 1,01$ (exact $\approx 1,00995$).

2. Continuité, dérivées à droite et à gauche

Théorème — Dérivable $\Rightarrow$ continue

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Piège à éviter

La réciproque est **fausse** : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable. *Dérivable $\Rightarrow$ continue*, jamais l'inverse.

Définition — Dérivées à droite / à gauche

$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (lorsqu'elles existent et sont finies).

Propriété — Caractérisation de la dérivabilité

f est dérivable en x_0 **si et seulement si** :

(1) $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont finies ;

(2) $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, la courbe présente un **point anguleux**.

3. Fonction dérivée, dérivées successives, opérations

Définition — Dérivées successives

Si f est dérivable sur I , $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée**. Si f' est dérivable, on note $f'' = f^{(2)}$, puis $f^{(n)}$ par récurrence, avec $f^{(0)} = f$.

Propriété — Opérations sur les dérivées

Soient f, g dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) $(f + g)' = f' + g'$;

(2) $(\lambda f)' = \lambda f'$;

(3) $(fg)' = f'g + fg'$;

(4) $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ (si g ne s'annule pas sur I) ;

(5) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (si g ne s'annule pas sur I).

2. Dérivée d'une fonction composée

Théorème — Règle de la chaîne

Soient f définie sur I et g définie sur J . Si :

- (1) f est dérivable sur I ;
 - (2) g est dérivable sur J ;
 - (3) $f(I) \subset J$;
- alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Boîte à outils — Dérivées composées à connaître par cœur

$$(u^n)' = n u^{n-1} u', \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (\sin u)' = u' \cos u, \quad (\cos u)' = -u' \sin u, \quad (\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u).$$

Exemple

$$h(x) = \sin^3 x \Rightarrow h' = 3 \sin^2 x \cos x; \quad r(x) = (1+x)^{10} \Rightarrow r' = 10(1+x)^9; \quad k(x) = (x-1)^{2017} \Rightarrow k' = 2017(x-1)^{2016}.$$

3. Dérivée de la bijection réciproque

Théorème — Théorème de la bijection

Soit f définie sur un intervalle I . Si :

- (1) f est **continue** sur I ;
 - (2) f est **strictement monotone** sur I ;
- alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ (bornes obtenues par les limites aux bornes de I). La réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue, de même monotonie, et $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Théorème — Dérivée de la réciproque

Avec les hypothèses précédentes, si de plus :

- (1) f est dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$;
 - (2) $f'(x_0) \neq 0$;
- alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Si $f'(x_0) = 0$ (tangente horizontale), $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente *verticale* en y_0 .

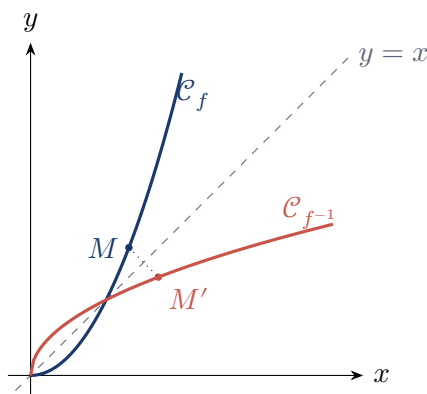


Figure 2. Symétrie de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ par rapport à $y = x$.

Méthode — Calculer $(f^{-1})'(y_0)$ sans expliciter f^{-1}

- (1) Résoudre $f(x) = y_0$ pour l'antécédent x_0 (valeur remarquable); (2) vérifier $f'(x_0) \neq 0$;
- (3) appliquer $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Ne jamais chercher f^{-1} d'abord.

4. Dérivée de la fonction arctangente

La fonction $\tan$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $1 + \tan^2 > 0$. Sa réciproque est la fonction **arctangente**.

Théorème — Dérivée de $\arctan$ et de $\arctan \circ u$

- (1) $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- (2) Si u est dérivable sur I , alors $\arctan(u)$ est dérivable sur I et

$$(\arctan(u))'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}.$$

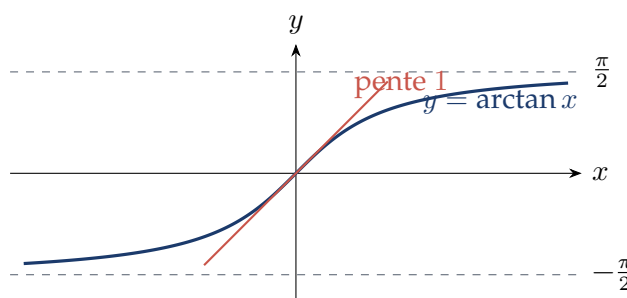


Figure 3. $\arctan$: impaire, croissante, asymptotes $y = \pm \frac{\pi}{2}$.

Propriété — Identités remarquables

- (1) $(\forall x > 0) \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2};$
- (2) $(\forall x < 0) \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2};$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$

Astuce — Prouver $\arctan u(x) = \text{cste}$

Dériver la différence : si la dérivée est nulle sur un *intervalle*, la fonction y est constante ; on évalue en un point commode. Toujours vérifier que le domaine est bien un intervalle.

5. Racine n -ième et puissances rationnelles

Théorème — Racine n -ième

Pour $n \geq 2$, $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

En 0, tangente verticale (non dérivable).

Théorème — Puissances rationnelles et composées

Soit $r \in \mathbb{Q}$.

(1) $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(x^r)' = r x^{r-1}$.

(2) Si u est dérivable et **strictement positive** sur I , alors

$$(u^r)' = r u^{r-1} u', \quad (\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n (\sqrt[n]{u})^{n-1}}.$$

Astuce — Le bon réflexe algébrique

Pour dériver ou primitiver une fonction « irrationnelle », poser $u = \sqrt[n]{x}$ ou reconnaître une forme $u' u^\alpha$. Le changement $u = \sqrt[n]{x}$ transforme l'irrationnel en polynôme.

4. Tableau récapitulatif des dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n (\sqrt[n]{x})^{n-1}}$	$]0, +\infty[$
$x^r, r \in \mathbb{Q}$	$r x^{r-1}$	$]0, +\infty[$
$\sin x ; \cos x$	$\cos x ; -\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
u^n	$n u^{n-1} u'$	u dérivable
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$, dérivable
$\sqrt[n]{u} ; u^r$	$\frac{u'}{n (\sqrt[n]{u})^{n-1}} ; r u^{r-1} u'$	$u > 0$, dérivable
$\arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	u dérivable

6. Fonctions primitives

Définition — Primitive

F est une **primitive** de f sur l'intervalle I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Théorème — Ensemble des primitives / existence

Soit f définie sur un intervalle I .

- (1) Si F est une primitive de f sur I , alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $F + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.
- (2) Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une *unique* primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.
- (3) (**Théorème fondamental**) Si f est **continue** sur I , alors f admet des primitives sur I .

Piège à éviter — Le rôle de l'intervalle

« Dérivée nulle $\Rightarrow$ constante » n'est vrai que sur un **intervalle**. Sur $\mathbb{R}^*$, une fonction de dérivée nulle peut prendre deux valeurs différentes sur $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$.

Propriété — Opérations sur les primitives

Soient F, G des primitives de f, g sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (1) $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I ;
 - (2) λF est une primitive de λf sur I .
- Il n'existe aucune règle simple pour fg ou f/g .

Méthode — Reconnaître une forme $u' \times (\dots \circ u)$

Chercher une fonction *intérieure* u dont la dérivée u' apparaît en facteur (quitte à ajuster une constante), puis se ramener à une ligne du tableau. C'est la technique centrale du calcul de primitives.

5. Tableau des primitives usuelles

$f(x)$	une primitive $F(x)$	Domaine
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
$x^r, r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\cos x; \sin x$	$\sin x; -\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$
$\cos(ax+b); \sin(ax+b)$	$\frac{\sin(ax+b)}{a}; \frac{-\cos(ax+b)}{a}$	$\mathbb{R} (a \neq 0)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

(à chaque primitive s'ajoute une constante $+c$)

6. Primitives des formes composées

forme f	primitive F	condition sur u
$u' u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	u dérivable
$u' u^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	u dérivable, $u \neq 0$
$u' u^r, r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	u dérivable, $u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	u dérivable, $u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u dérivable, $u > 0$
$u' \cos u; u' \sin u$	$\sin u; -\cos u$	u dérivable
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$	u dérivable

Boîte à outils — Primitives de $\cos^p x \sin^q x$

Si un exposant est **impair** : isoler un facteur et poser $u = \cos x$ ou $u = \sin x$. Si les deux sont **pairs** : *linéariser* ($\cos^2 = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}$). Produit $\cos(ax) \cos(bx)$: formules produit $\rightarrow$ somme.

7. Étude des fonctions : compléments

7. Symétries et périodicité

Propriété — Axe et centre de symétrie, période

Soit $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) Droite $x = a$ **axe de symétrie** $\Leftrightarrow \forall x, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- (2) Point $\Omega(a, b)$ **centre de symétrie** $\Leftrightarrow \forall x, 2a - x \in D_f$ et $f(a + x) + f(a - x) = 2b$.
- (3) f **T -périodique** ($T > 0$) $\Leftrightarrow \forall x, x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

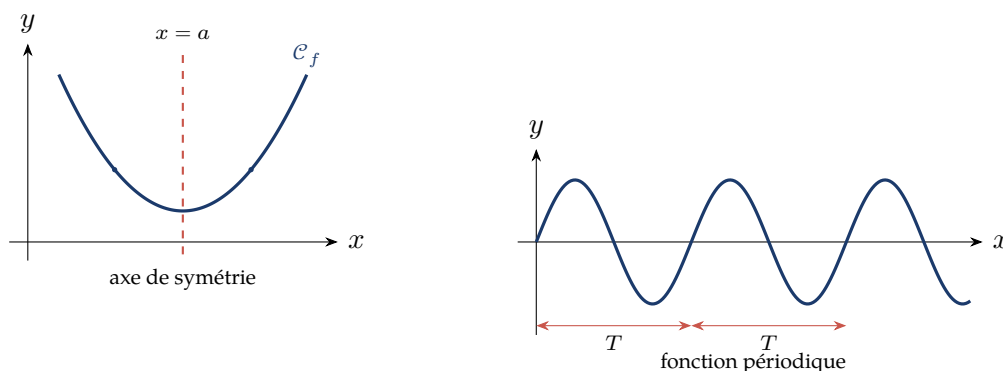


Figure 4. Axe de symétrie $x = a$ et fonction T -périodique.

8. Tangentes verticales, branches infinies

Propriété — Tangente verticale

Si f est continue en a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet en $A(a, f(a))$ une **tangente verticale** (demi-tangente dirigée vers le haut si $+\infty$, vers le bas si $-\infty$).

Boîte à outils — Ordre des tests d'une branche infinie en $\pm\infty$

(1) $\lim f$ finie $\rightarrow$ asymptote horizontale. (2) sinon $\lim \frac{f}{x} = a$: si $\pm\infty$, branche parabolique de direction (Oy) . (3) si $a \in \mathbb{R}^*$: $\lim(f - ax) = b$ fini $\rightarrow$ asymptote oblique $y = ax + b$; sinon branche parabolique de direction $y = ax$.

9. Convexité, concavité, point d'inflexion

Propriété

Soit f deux fois dérivable sur I . Si $f'' \geq 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ **convexe** (au-dessus de ses tangentes). Si $f'' \leq 0$: **concave**. Si f'' s'annule en a en changeant de signe : $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** (la courbe traverse sa tangente).

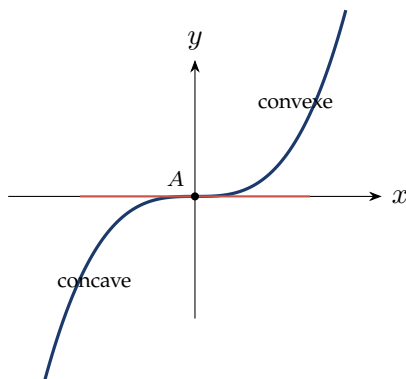


Figure 5. Point d'inflexion : la concavité change en A .

8. Exercices du cours

Énoncés ci-dessous. Les corrigés détaillés figurent dans le document « Corrections des exercices du cours ». À chaque primitive s'ajoute une constante $+c$.

Exercice 1 — Primitives : reconnaissance de forme

☆☆☆ Polycopié - Exercice 13

Déterminer les primitives de f , en précisant l'intervalle I :

1. $\frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $\frac{x - 1}{(x^2 - 2x - 3)^3}$, $I =]3, +\infty[$.
3. $\frac{x + 5}{(x - 1)^4}$, $I =]1, +\infty[$.
4. $\cos^3 x$, $I = \mathbb{R}$.
5. $\frac{1}{\cos^4 x}$, $I =]0, \frac{\pi}{2}[$.
6. $\tan^2 x + \tan^4 x$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
7. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $x\sqrt{x^2 + 1}$, $I = \mathbb{R}$.
9. $x\sqrt[3]{x^2 - 1}$, $I = [1, +\infty[$.
10. $\frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)}$, $I =]0, +\infty[$.

Exercice 2 — Primitives : entraînement complet

☆☆☆ Polycopié - Exercice 14

Déterminer une primitive de f sur un intervalle convenable :

1. $x^3 + \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$.
2. $\frac{3}{x^5} + \frac{2}{x^3}$.
3. $\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
4. $x^3\sqrt{x^2 + 1}$.
5. $\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^4$.
6. $\sqrt[3]{x + 2}$.
7. $x\sqrt[3]{x^2 - 1}$.
8. $\sin x \cos^4 x$.
9. $\cos x \cos 3x$.
10. $\cos^4 x$.
11. $\sin^5 x$.
12. $\sin x \cos x \sqrt{1 - \cos 2x}$.
13. $\frac{1}{x^2 - x + 1}$.
14. $\frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)}$.
15. $\frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)^2}$.
16. $\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.
17. $\sqrt[3]{x - 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}}$.
18. $\frac{x^2}{1 + x^2}$.
19. $\frac{4x^2 - 3}{1 + x^2}$.
20. $\tan^4 x + 3 \tan^2 x$.

Exercice 3 — Primitive via une identité algébrique

★★☆☆ Polycopié · Exercice 15

f définie sur $I = [-1, +\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x + 1}$. Déterminer les primitives de f sur I . *Indication* : $x^2 = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$.

Exercice 4 — Cas général avec la racine n -ième

★★☆☆ Polycopié · Exercice 16

$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et f sur $I = [-1, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt[n]{x + 1}$. Déterminer les primitives. *Indication* : $x = (x + 1) - 1$.

Exercice 5 — Primitive, binôme de Newton et une somme

★★★★☆ Polycopié · Exercice 17

$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $f(x) = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $F : x \mapsto (x+1)^n$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire $S_n = \sum_{k=1}^n k C_n^k$.

10. Étude de fonctions (partie 8.4 du polycopié)

Exercice 6 — Racines, symétrie et branche parabolique

★★★★☆ Polycopié 8.4 · Exercice 1

On considère $f(x) = 4\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{(x-1)^2}$ (soit $4\sqrt[6]{(x-1)^3} - 3\sqrt[6]{(x-1)^4}$), la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $x = 1$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

2. a) Étudier la dérivabilité à droite en $x_0 = 1$ (poser $t = \sqrt[6]{x-1}$).

b) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donner ses variations sur $[1, +\infty[$.

3. a) Vérifier $\forall x > 1, f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} (4\sqrt[6]{\frac{1}{x-1}} - 3)$.

b) Étudier la branche infinie en $+\infty$.

c) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes.

d) Montrer que $f(x) = x$ a une solution unique $\alpha \in]0, 1[$ et étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0, 1]$.

4. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 7 — Fonction avec racine cubique et arctangente

★★★★☆ Polycopié 8.4 · Exercice 2

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} & \text{si } x \leq 1, \\ (x-1)\left(1 + \arctan \frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. a) Étudier la continuité de f en 1.

b) Étudier la dérivabilité de f en 1 et donner l'interprétation géométrique.

2. Calculer les limites en $\pm\infty$; montrer que $y = x$ est asymptote en $+\infty$; étudier la branche en $-\infty$.

3. Étudier les variations de f sur $] -\infty, 1[$ puis sur $[1, +\infty[$.

4. Soit g la restriction de f à $J =] -\infty, 0]$. Montrer que g est une bijection sur un intervalle L ; résoudre $t^3 - 3t - 2 = 0$ dans $\mathbb{R}^+$, puis en déduire $g^{-1}(-2)$ et $(g^{-1})'(-2)$.

Exercice 8 — Fonction définie par morceaux, arctangente

★★★★☆ Polycopié 8.4 · Exercice 3

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x - \arctan \frac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\sqrt[3]{1-6x} + x - 1}{x} & \text{si } x < 0, \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Étudier la dérivabilité à gauche de f en 0 et donner l'interprétation géométrique.
3. Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
5. Soit g la restriction de f à $I =]0, +\infty[$. Montrer que g est une bijection sur un intervalle J et déterminer $g^{-1}(x)$.

Exercice 9 — Étude de $\tan^2 - 2\sqrt{3}\tan$ et réciproques

★★★★☆ Polycopié 8.4 · Exercice 4

$$f(x) = \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x.$$

1. Étudier les variations de f sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. Tracer $\mathcal{C}_f$.
3. Soit g la restriction de f à $[0, \frac{\pi}{3}]$ et h la restriction de f à $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que g et h sont des bijections vers des intervalles à préciser, et calculer g^{-1} et h^{-1} .