



ANNÉE : 2025/2026 ★ PROF : ABED ★

DURÉE : 2 HEURES

EXERCICE 1. 1 PTS

On considère la fonction f définie sur par : $f(x) = x^3 + 2x - 13$

- ① Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
- ② Donner par la méthode de la dichotomie une valeur approchée de α avec une précision de l'ordre de 10^{-1} .

EXERCICE 2. 2 PTS

- ① Montrer que : $\forall x > 0; \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- ② Montrer que : $\forall x < 0; \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 3. 5 PTS

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer les limites suivantes : Calculer les limites suivantes :

- ① $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2025} + 1}{x^{17} + 1}$
- ② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2}$
- ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} - x - 1$
- ④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 + \sqrt[3]{x^2 - x + 2}$
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}$
- ⑥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x+1} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}} \sqrt[20]{x}$
- ⑦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x} - 1 + x}{x^2}$
- ⑧ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x-1} \sqrt[3]{3x+2}}{x-2}$
- ⑨ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}) \arctan(2x+1) - \frac{\pi}{2}x$
- ⑩ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

EXERCICE 4. 2 PTS

. On considère dans l'équation :

$$x^3 + 3x - 4 = 0 \quad (E)$$

- ① Montrer que l'équation (E) admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ (1 pt)
- ② On pose $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.
Etablir que α est une solution de l'équation (E) , en déduire que : $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$ (1 pt)

EXERCICE 5. 2 PTS

Simplifier l'expression de la fonction suivante :

$$f(x) = \arctan \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)$$

EXERCICE 6. 2 PTS.

- ① Calculer $A = 4 \arctan \frac{1}{5}$
- ② Soit x, y deux nombres réels tels que : $0 < x < y$. Montrer que : $\arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y-x}{y+x} = \frac{\pi}{4}$.
- ③ Montrer que : $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE 7. 2 PTS

- ① Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $\arctan(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x$
- ② En déduire les valeurs de $\tan \frac{\pi}{12}$ et de $\tan \frac{\pi}{8}$.

[5 pts]

EXERCICE 8.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \arctan \left(\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1+\sqrt[n]{x}} \right), & x \in [0; 1] \\ f(x) = \sqrt[n]{x^2-x} - x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

- ① Montrer que la fonction f est continue en 1.
- ② Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$.
- ③ Montrer que $(\forall x \in [0; 1]) \left(\exists! \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}] \right) : (\tan(\alpha))^n = x$.
- ④ En déduire que $(\forall x \in [0; 1]) : f(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(\sqrt[n]{x})$.
- ⑤ Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - (a) Montrer que h admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
 - (b) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- ⑥ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ et montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{2n}.$$

- ⑦ Montrer que $(\forall x < 0) : \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$, en déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 \arctan(1 - \sqrt[n]{x}) + \pi \right).$$