



Maths & Expert

Excellence en Mathématiques | Sciences Mathématiques

Prof. R. Abed — Agrégé de Mathématiques

RAPPELS • MÉTHODES • ASTUCES • EXERCICES CORRIGÉS

Cap sur la Terminale SM

Fascicule de révision et de préparation à la rentrée

Calcul algébrique | Limites | Dérivation | Étude de fonctions

Du 1^{er} au 2^e Baccalauréat Sciences Mathématiques



Algèbre



Limites



Dérivation



Fonctions

5 parties | 12 chapitres | Cours · Méthodes · Astuces · Pièges · Exercices corrigés

Année scolaire 2025 / 2026 — Vers l'excellence en mathématiques

Table des matières

Avant-propos	3
Mode d'emploi	3
Note sur les énoncés	3
PREMIÈRE PARTIE — Calcul algébrique	4
Chapitre 1 — Coefficients binomiaux et binôme de Newton	5
Factorielles	5
Arrangements et coefficients binomiaux	5
La formule du binôme de Newton	6
Chapitre 2 — Factorisations de référence et télescopage	8
La factorisation de $a^n - b^n$	8
Les sommes classiques	10
DEUXIÈME PARTIE — Calcul des limites	12
Chapitre 3 — Stratégie générale face à une limite	13
Limites de fonctions rationnelles	14
Chapitre 4 — Expressions irrationnelles : la quantité conjuguée	17
Formes $\infty - \infty$ à l'infini	18
Chapitre 5 — Limites trigonométriques	20
Chapitre 6 — Ordre, encadrements et partie entière	23
Chapitre 7 — Définitions formelles des limites	27
TROISIÈME PARTIE — Dérivation	29
Chapitre 8 — Nombre dérivé et interprétations	30
Le nombre dérivé comme outil de calcul de limites	31
Chapitre 9 — Formulaire et opérations	33
Chapitre 10 — Dérivées successives et récurrence	35
Chapitre 11 — Applications de la dérivée	38
Premières équations différentielles	40
QUATRIÈME PARTIE — Étude de fonctions	43
Chapitre 12 — Branches infinies	44
Chapitre 13 — Concavité et points d'inflexion	45
Chapitre 14 — Symétries et périodicité	47
Chapitre 15 — Trois problèmes de synthèse	49
CINQUIÈME PARTIE — Neuf exercices originaux	55
Chapitre 16 — Pour aller plus loin	56

ANNEXES — Formulaire et plan de révision	66
Annexe A — Le formulaire minimal	67
Algèbre	67
Limites de référence	67
Dérivation	67
Inégalités à connaître	67
Annexe B — Quatre semaines pour être prêt	69

Avant-propos

Ce fascicule s'adresse à l'élève qui achève la **première année du Baccalauréat Sciences Mathématiques** et s'apprête à entrer en **deuxième année**. Il n'est ni un manuel, ni un simple recueil d'exercices : c'est un *document de transition*, conçu pour consolider les quatre piliers sur lesquels reposera toute l'année de terminale :

1. le **calcul algébrique** (binôme de Newton, sommes, factorisations) ;
2. le **calcul des limites** sous toutes ses formes ;
3. la **dérivation** et ses applications ;
4. l'**étude complète d'une fonction** et le tracé de sa courbe.

1. Mode d'emploi

Chaque chapitre suit la même architecture, matérialisée par un code couleur constant :

 Définition / À retenir	L'énoncé exact, celui qu'il faut savoir réciter.
 Propriété	Les résultats immédiats, à utiliser sans démonstration.
 Théorème / Exemple / Rappel	Les résultats structurants et leurs illustrations.
 Méthode / Astuce / Boîte à outils	<i>Comment faire</i> : la démarche, pas seulement le résultat.
 Piège à éviter / Attention	Les erreurs que l'on rencontre chaque année en copie.

Les exercices sont gradués de ★☆☆☆ (application directe) à ★★★★★ (niveau olympiade ou concours). Un badge doré indique la nature de l'exercice : **Basique** (application directe du cours), **Classique** (incontournable, à savoir refaire), **Important** (exercice de synthèse ou de concours) et **Original** pour les exercices composés spécialement pour ce document.

À retenir — Conseil de travail

Un cours de mathématiques se lit **crayon en main**. Cherchez chaque exercice *au moins vingt minutes* avant de regarder la correction : c'est pendant la recherche infructueuse que se construit l'intuition, jamais pendant la lecture d'une solution. Refaites ensuite l'exercice *sans* le corrigé, deux jours plus tard. Cette répétition espacée vaut dix relectures passives.

2. Note sur les énoncés

Les exercices repris des documents sources ont été **systématiquement vérifiés** avant d'être intégrés à ce fascicule : chaque énoncé a été recalculé et, le cas échéant, ajusté pour garantir sa cohérence et l'existence d'une solution.

Astuce — Le test de cohérence, votre meilleur allié

Avant même de chercher, testez l'énoncé sur un cas simple ($n = 1$, $n = 2$, $x = 0$, $a = b$). Si la formule proposée est fausse pour $n = 2$, elle est fausse. Ce réflexe de trente secondes vous évitera des heures de recherche sur un énoncé erroné — et vous fera gagner des points le jour de l'examen, car il détecte aussi *vos propres* erreurs de calcul.



PREMIÈRE PARTIE

Calcul algébrique

Factorielles et coefficients binomiaux, formule du binôme de Newton, sommes classiques, factorisations de référence et télescopage — l'outillage indispensable avant d'aborder les limites.

Chapitre 1 — Coefficients binomiaux et binôme de Newton

À retenir

Pourquoi commencer par là ? En Terminale SM, les factorisations $a^n - b^n$, le binôme de Newton et les sommes télescopiques interviennent *partout* : levée d'indéterminations, récurrences, suites, dénombrement, et plus tard nombres complexes et arithmétique. Un élève qui maîtrise ce chapitre gagne un temps considérable sur tout le reste de l'année.

1. Factorielles

Définition — Factorielle

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $n!$ (lire «factorielle n ») par :

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

De façon explicite : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k$.

Remarque

La convention $0! = 1$ n'est pas arbitraire : elle est la seule qui rende la relation $(n+1)! = (n+1)n!$ valable dès $n = 0$, et la seule qui donne $C_n^0 = 1$. Une bonne convention est une convention qui préserve les formules.

Astuce — Simplifier un quotient de factorielles

Ne développez **jamais** les factorielles. Écrivez plutôt :

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1).$$

Règle d'or : $\frac{n!}{(n-k)!}$ est un produit de k **facteurs consécutifs** descendant depuis n .

2. Arrangements et coefficients binomiaux

Définition — Arrangements, combinaisons

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Remarque

La notation C_n^k (lire « k parmi n ») est celle employée dans ce fascicule. Vous rencontrerez aussi la notation internationale $\binom{n}{k}$, de plus en plus répandue en classes préparatoires et dans la littérature : les deux désignent exactement le même nombre. Attention à l'ordre : dans C_n^k , n est l'effectif *total* (en bas) et k le nombre d'éléments choisis (en haut).

Propriété — Propriétés de base

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ (valable pour $n \geq 1$) ;
3. $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (valable pour $n \geq 2$) ;
4. **Symétrie** : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, C_n^k = C_n^{n-k}$;
5. **Formule de Pascal** : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
6. **Formule du pion** : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Méthode — Trois façons de prouver une identité binomiale

- (a) **Par le calcul** : on remplace chaque C_n^k par $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et on met au même dénominateur. Infaillible, parfois long.
- (b) **Par dénombrement** : C_n^k est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Pascal se lit alors : « parmi les parties à $k+1$ éléments de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on sépare celles qui contiennent $n+1$ de celles qui ne le contiennent pas ». Élégant et instantané.
- (c) **Par identification de coefficients** : on développe $(1+x)^n$ de deux manières différentes. C'est la technique la plus puissante.

Piège à éviter

La formule de Pascal ajoute deux coefficients **consécutifs de même ligne** pour donner un coefficient de la ligne suivante. Ne l'écrivez jamais $C_n^k + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ ni $C_n^k + C_{n+1}^k = \dots$. Récitez-la sous la forme mnémotechnique : « deux voisins d'une ligne du triangle donnent celui du dessous ».

3. La formule du binôme de Newton

Théorème — Binôme de Newton

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Remarque

Les deux écritures sont équivalentes : on passe de l'une à l'autre par le changement d'indice $j = n - k$, en utilisant la symétrie $C_n^k = C_n^{n-k}$. Le théorème est valable dès $n = 0$ (et pas seulement $n \geq 2$), à condition d'adopter la convention $0^0 = 1$ lorsque a ou b est nul.

Astuce — Le terme général, sans se tromper

Dans $(a+b)^n$, le terme d'indice k est $C_n^k a^{n-k} b^k$. **Contrôle systématique** : la somme des exposants doit toujours valoir n . Si vous écrivez $C_n^k a^{n-k} b^{k+1}$, l'erreur saute aux yeux.

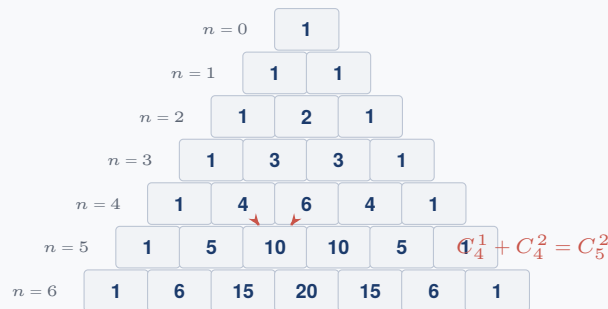
Piège à éviter

$(a - b)^n \neq \sum C_n^k a^{n-k} b^k$. Il faut écrire $a - b = a + (-b)$, d'où

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Le signe $(-1)^k$ porte sur k , pas sur $n - k$.

Triangle de Pascal



Chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui : c'est exactement la formule de Pascal. La ligne n donne les coefficients de $(a + b)^n$.

Exercice 1 — Développements par le binôme

☆☆☆☆ Basique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton :

1. $(a + b)^3$; 2. $(a + b)^4$; 3. $(a + b)^7$; 4. $(a - b)^5$; 5. $(2x - 3)^4$.

Correction

Les lignes du triangle de Pascal donnent directement les coefficients.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7,$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Pour la dernière, on pose $a = 2x$ et $b = -3$:

$$(2x - 3)^4 = 16x^4 - 4 \cdot 8x^3 \cdot 3 + 6 \cdot 4x^2 \cdot 9 - 4 \cdot 2x \cdot 27 + 81 = 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81.$$

Contrôle : en faisant $x = 1$ on doit trouver $(2 - 3)^4 = 1$, et en effet $16 - 96 + 216 - 216 + 81 = 1$.

Astuce — Vérifier un développement en 3 secondes

Substituez $a = b = 1$: la somme des coefficients doit valoir 2^n . Substituez $a = 1, b = -1$: la somme alternée doit valoir 0 (pour $n \geq 1$). Ces deux tests détectent la quasi-totalité des erreurs de calcul.

Théorème — Cas particulier fondamental

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$.

Exercice 2 — Sommes de coefficients binomiaux

★★★★ Basique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

- $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$;
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$;
- en déduire que $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}$;
- (complément) $\sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$.

Correction

1. et 2. On applique le binôme à $(1+1)^n$ puis à $(1-1)^n$:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k, \quad 0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \quad (n \geq 1).$$

3. Notons $P = \sum_{k \text{ pair}} C_n^k$ et $I = \sum_{k \text{ impair}} C_n^k$. Les deux relations précédentes s'écrivent $P + I = 2^n$ et $P - I = 0$. Ce système donne immédiatement $P = I = 2^{n-1}$.

4. Par la formule du pion : $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$, donc

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \stackrel{j=k-1}{=} n \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j = n 2^{n-1}. \blacksquare$$

Astuce — Le réflexe « je dérive »

La question 4 se traite aussi en dérivant l'identité polynomiale $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}, \quad \text{puis } x = 1.$$

Dériver puis évaluer est la technique reine pour faire apparaître un facteur k ; **intégrer puis évaluer** fait apparaître un facteur $\frac{1}{k+1}$. Gardez-la en mémoire, elle resservira toute l'année.

Chapitre 2 — Factorisations de référence et télescopage

4. La factorisation de $a^n - b^n$

Théorème — Deuxième identité remarquable généralisée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Méthode — Démonstration par télescopage

Posons $u_k = a^k b^{n-k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = a^n - b^n.$$

Principe du télescopage : si un terme s'écrit $v_{k+1} - v_k$, la somme «se rétracte» et il ne reste que les extrémités : $\sum_{k=p}^q (v_{k+1} - v_k) = v_{q+1} - v_p$. C'est l'outil n°1 pour calculer une somme sans récurrence.

□ Le télescopage : tout s'annule, sauf les deux bouts

chaque terme intérieur apparaît deux fois, avec des signes opposés

$$\boxed{u_0} - \cancel{u_1} + \cancel{u_1} - \cancel{u_2} + \cancel{u_2} - \dots + \cancel{u_{n-1}} - \boxed{u_n}$$

survivant survivant

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_n$$

C'est tout le principe du télescopage. Dès que vous parvenez à écrire le terme général sous la forme $u_k - u_{k+1}$, la somme est calculée d'avance : seuls survivent le premier et le dernier terme.

Propriété — Cas particuliers à connaître par cœur

- $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \quad (a \neq b)$
- $1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$
- $a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k \quad (n \text{ impair})$

Piège à éviter

$a^n + b^n$ n'est factorisable par $a + b$ que si n est **impair**. Pour n pair, $a^n + b^n$ ne s'annule jamais (sauf $a = b = 0$) et n'admet donc aucune racine réelle : $a^2 + b^2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. *Test mental* : $a = 1$, $b = -1$ annule-t-il $a^n + b^n$?

Exercice 3 — Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ «à la main»

★★★★ Basique

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Montrer que $1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
- (a) En déduire que $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{x^n}{1-x}$.
 (b) **Application** : vérifier que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$.
- On suppose de plus $x \neq -1$.
 (a) Montrer que $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$.
 (b) **Application** : vérifier que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x}$.

Correction

- C'est le théorème précédent avec $a = 1$ et $b = x$.
- (a) On divise l'identité par $1 - x \neq 0$: $\frac{1 - x^n}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, c'est-à-dire $\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, d'où le résultat.
 (b) C'est le cas $n = 4$.
- (a) On remplace x par $-x$ dans 2.(a) : $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + \frac{(-x)^n}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$.
 (b) Cas $n = 4$: $(-1)^4 = 1$, d'où le signe + devant $\frac{x^4}{1+x}$. ■

À retenir

Cette identité est votre **premier développement limité**. Elle dit que $\frac{1}{1-x}$ vaut « $1 + x + \dots + x^{n-1}$ à un reste $\frac{x^n}{1-x}$ près ». En Terminale et surtout en prépa, ce type d'écriture « *partie principale + reste contrôlé* » est la clef de tous les calculs de limites fins. Retenez le mécanisme, pas seulement le résultat.

5. Les sommes classiques

Boîte à outils — Les trois sommes à connaître par cœur

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2.$$

Méthode — Démontrer S_2 par télescopage (sans récurrence)

On part de l'identité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ et on somme pour k de 1 à n :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3]}_{=(n+1)^3 - 1 \text{ (télescopage)}} = 3S_2 + 3S_1 + n.$$

D'où $3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n$, et après simplification $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Le procédé se généralise : pour obtenir S_p , partez de $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ et summez. C'est bien

plus rapide qu'une récurrence, et surtout cela *trouve* la formule au lieu de la vérifier.

Astuce — La belle formule $S_3 = S_1^2$

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$. Cette égalité surprenante se retient très bien et sert de test immédiat : pour $n = 3$, $1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$. ✓

Exercice 4 — Sommes emboîtées

☆☆☆ Original

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $T_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)$ en fonction de n .
2. Vérifier que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, puis calculer $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
3. En s'inspirant de la question 2, calculer $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. (Indication : chercher α tel que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \alpha \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$.)
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Correction

1. $T_n = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = S_2 + S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} [(2n+1) + 3] = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$. ✓ Par télescopage : $U_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.
3. On a $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$, donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et $V_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.
4. $U_n \rightarrow 1$ et $V_n \rightarrow \frac{1}{4}$. ■

Astuce — Reconnaître une somme télescopique

Devant $\sum \frac{1}{k(k+1) \dots (k+p)}$, cherchez toujours à écrire le terme général comme une **différence de deux termes consécutifs** d'une même suite. Signe qui ne trompe pas : le dénominateur est un produit de facteurs *consécutifs*.



DEUXIÈME PARTIE

Calcul des limites

*Les sept formes indéterminées et les stratégies pour les lever :
factorisation, quantité conjuguée, taux d'accroissement, limites
trigonométriques de référence, encadrements et partie entière.*

Chapitre 3 — Stratégie générale face à une limite

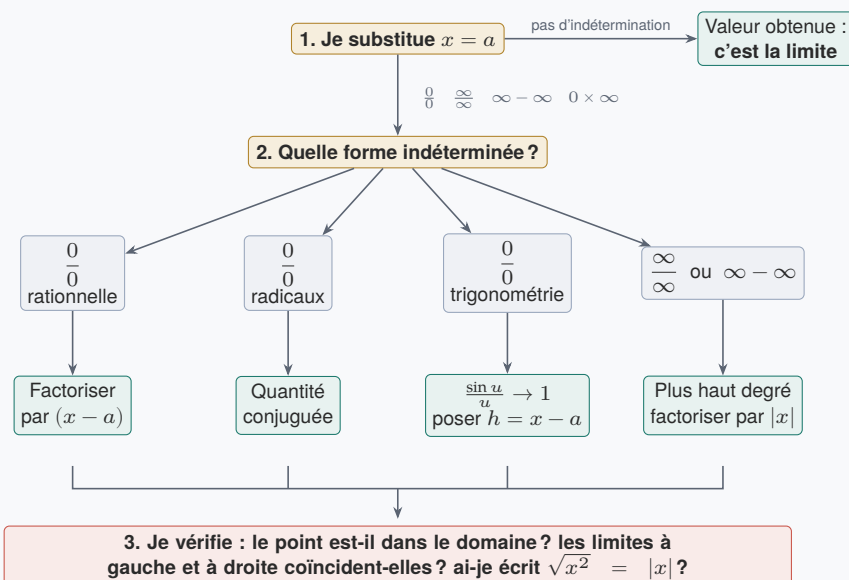
À retenir — Les quatre questions à se poser, dans cet ordre

1. **Y a-t-il vraiment une indétermination ?** Substituez d'abord. Dans 60 % des cas, la limite s'obtient par simple substitution.
2. **De quelle forme s'agit-il ?** $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .
3. **Quel est l'outil adapté à cette forme ?** (voir le tableau ci-dessous)
4. **Ai-je le droit de conclure ?** Limite à gauche = limite à droite ? Le domaine autorise-t-il ce voisinage ?

Boîte à outils — Tableau de décision

Forme	Contexte	Outil
$\frac{0}{0}$	fraction rationnelle	Factoriser par $(x-a)$; division euclidienne; $a^n - b^n$
$\frac{0}{0}$	présence de radicaux	Multiplier par la quantité conjuguée
$\frac{0}{0}$	on reconnaît $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	Taux d'accroissement : la limite est $f'(a)$
$\frac{0}{0}$	trigonométrie	$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$, $\frac{1 - \cos u}{u^2} \rightarrow \frac{1}{2}$
$\frac{\infty}{\infty}$	polynômes / rationnelles	Termes de plus haut degré
$\frac{\infty}{\infty}$	radicaux	Quantité conjuguée, puis factoriser par $ x $
$0 \times \infty$	produit borné $\times$ quelque chose	Encadrement (théorème des gendarmes)

Face à une limite : l'arbre de décision



Suivez toujours cet ordre. La dernière étape n'est pas facultative : c'est elle qui distingue une réponse juste d'une réponse « presque juste ».

Piège à éviter — La faute la plus coûteuse

$\sqrt{x^2} = |x|$ et **non** x . Lorsqu'on factorise sous une racine au voisinage de $-\infty$:

$$\sqrt{4x^2 - 3x + 2} = |x| \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \begin{cases} x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} & \text{si } x \rightarrow +\infty, \\ -x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} & \text{si } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Oublier le signe en $-\infty$ est l'erreur numéro un des copies de Terminale.

1. Limites de fonctions rationnelles

Méthode — Forme $\frac{0}{0}$ pour une fraction rationnelle

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ est de la forme $\frac{0}{0}$, alors a est racine à la fois de P et de Q . Donc $(x - a)$ divise P et Q :

$$P(x) = (x - a)P_1(x), \quad Q(x) = (x - a)Q_1(x), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad (x \neq a).$$

On recommence tant que la forme reste indéterminée.

Trois façons d'obtenir P_1 : division euclidienne posée, schéma de Horner (le plus rapide), ou identification des coefficients.

Astuce — Horner en dix secondes

Pour diviser $x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1$ par $x - 1$, on aligne les coefficients 1, -2, 1, 1, -1 et on « descend-multiplie-additionne » par 1 :

$$1 \rightarrow 1 \cdot 1 - 2 = -1 \rightarrow -1 \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow 0 \cdot 1 + 1 = 1 \rightarrow 1 \cdot 1 - 1 = 0.$$

Le dernier nombre est le **reste** (ici 0 : 1 est bien racine) et les précédents sont les coefficients du quotient : $x^3 - x^2 + 0x + 1$.

Exercice 1 — Fractions rationnelles, forme $\frac{0}{0}$

☆☆☆☆ Basique

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^4 - 16};$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}.$

Correction

1. $3x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(3x + 1)$ et $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(3x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{3}.$$

2. $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 1)$ et $x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$,

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{5}{4 \times 8} = \frac{5}{32}.$$

3. Par Horner, $x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1 = (x-1)(x^3 - x^2 + 1)$ et $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Donc la limite vaut $\frac{1-1+1}{1+2} = \frac{1}{3}$. ■

Astuce — Factorisation «à vue» par groupement

Dans la question 2, on a repéré $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x-2) + 1 \cdot (x-2)$: le groupement par paires évite toute division. Cherchez-le systématiquement sur les polynômes de degré 3 à 4 dont les coefficients se répètent.

Théorème — La limite fondamentale

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}, \quad \text{en particulier} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n.$$

Méthode — Le quotient de deux limites fondamentales

Pour $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$, on divise haut et bas par $x - 1$:

$$\frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{\frac{x^p - 1}{x - 1}}{\frac{x^q - 1}{x - 1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{p}{q}.$$

Astuce à mémoriser : « la limite est le rapport des exposants ».

Exercice 2 — Quotients de puissances

☆☆☆☆ Basique

Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2024} - 1}{x^{17} - 1}$;
4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2025} + 1}{x^{17} + 1}$;
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2016} - 1}{x^{2015} - 1}$;
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3-x)^n - 1}{x - 2}, n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

1. $\frac{3}{4}$. 3. $\frac{2024}{17}$. 5. $\frac{2016}{2015}$.

2. On se ramène en 1 par $x = 2t$, ou plus simplement : $\frac{x^3 - 8}{x^4 - 16} = \frac{(x^3 - 2^3)/(x-2)}{(x^4 - 2^4)/(x-2)} \rightarrow \frac{3 \cdot 2^2}{4 \cdot 2^3} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.

4. Les exposants 2025 et 17 étant **impairs**, $x^{2025} + 1$ et $x^{17} + 1$ s'annulent en -1 . En posant $x = -t$:

$$\frac{x^{2025} + 1}{x^{17} + 1} = \frac{-(t^{2025} - 1)}{-(t^{17} - 1)} = \frac{t^{2025} - 1}{t^{17} - 1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{2025}{17}.$$

6. On pose $u = 3-x$: quand $x \rightarrow 2$, $u \rightarrow 1$ et $x-2 = 1-u$. Donc $\frac{(3-x)^n - 1}{x - 2} = -\frac{u^n - 1}{u - 1} \rightarrow -n$. ■

Piège à éviter

En question 4, si l'un des exposants avait été *pair*, le dénominateur ne se serait pas annulé en -1 et il n'y aurait eu aucune indétermination. **Vérifiez toujours que vous avez bien affaire à une forme $\frac{0}{0}$** avant de dégainer une technique.

Exercice 3 — Autour du binôme et des limites

★★★★☆ Classique

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2};$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)^n - 2^n}{x-1};$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)^n - 2^n - 2^{n-1}n(x-1)}{(x-1)^2}.$

Correction

On utilise $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = 1 + nx + C_n^2 x^2 + x^3 R(x)$ où R est polynomiale.

- $\frac{(1+x)^n - 1}{x} = n + C_n^2 x + x^2 R(x) \rightarrow n.$
- $\frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2} = C_n^2 + xR(x) \rightarrow C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$
- On pose $h = x - 1$, donc $1 + x = 2 + h$:

$$\frac{(2+h)^n - 2^n}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (t \mapsto t^n)'(2) = n 2^{n-1}.$$

- Avec le même h et le binôme $(2+h)^n = \sum_k C_n^k 2^{n-k} h^k$:

$$(2+h)^n = 2^n + n 2^{n-1} h + C_n^2 2^{n-2} h^2 + O(h^3),$$

donc la limite vaut $C_n^2 2^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} = n(n-1) 2^{n-3}$. ■

Exercice 4 — Une somme géométrique déguisée

★★★★☆ Classique

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère f définie par

$$f(x) = \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1} \quad (x \neq 1), \quad f(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k - 1}{x-1}.$
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^k - 1}{x-1} = k.$
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$; que peut-on en conclure sur f ?

4. (complément) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1}$.

Correction

1. $x + x^2 + \dots + x^n - n = \sum_{k=1}^n (x^k - 1)$ puisque $\sum_{k=1}^n 1 = n$. En divisant par $x - 1 \neq 0$ on obtient le résultat.

2. $\frac{x^k - 1}{x - 1} = 1 + x + \dots + x^{k-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} k$.

3. La somme étant finie (n termes fixes), on peut passer à la limite terme à terme : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = f(1)$. Donc f est continue en 1.

4. Le dénominateur : en posant $u = 2 - x \rightarrow 1$, on a $x - 1 = 1 - u$ et $\frac{(2-x)^n - 1}{x - 1} = -\frac{u^n - 1}{u - 1} \rightarrow -n$. Par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1} = \frac{n(n+1)/2}{-n} = -\frac{n+1}{2}. \blacksquare$$

Astuce — « Découper la somme »

Le coup de génie de la question 1 est d'écrire $n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n$ pour apparier chaque 1 avec un x^k . Chaque fois qu'une constante entière apparaît en face d'une somme de n termes, essayez ce découpage.

Chapitre 4 — Expressions irrationnelles : la quantité conjuguée

Méthode — La quantité conjuguée

On utilise l'identité $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ pour faire disparaître les racines :

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}, \quad \sqrt{u} - c = \frac{u - c^2}{\sqrt{u} + c}.$$

Où multiplier ? Là où se trouve l'indétermination : au numérateur si $\frac{0}{0}$ vient du haut, au dénominateur sinon, aux deux si les deux sont concernés.

Astuce — Racines cubiques

Pour $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, la conjuguée est $A^2 + AB + B^2$, car $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$. Plus généralement, avec $A = \sqrt[n]{u}$: multiplier par $\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$. C'est encore la factorisation de $a^n - b^n$ du Chapitre 2 !

Exercice 5 — Conjuguée en un point

★★☆☆ Basique

Calculer :

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{3 - \sqrt{2x+5}}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x - \sqrt{x}};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1}}{x\sqrt{x} - 8}; \quad 4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{15-2x}}.$$

Correction

1. On conjugue haut et bas :

$$\frac{2 - \sqrt{x+2}}{3 - \sqrt{2x+5}} = \frac{(4 - (x+2)) (3 + \sqrt{2x+5})}{(9 - (2x+5)) (2 + \sqrt{x+2})} = \frac{(2-x)(3 + \sqrt{2x+5})}{(4-2x)(2 + \sqrt{x+2})} = \frac{3 + \sqrt{2x+5}}{2(2 + \sqrt{x+2})}.$$

$$\text{En } x = 2 : \frac{3+3}{2 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

2. $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ et $1 - x^3 = -(x-1)(x^2 + x + 1) = -(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x^2 + x + 1)$, donc

$$\frac{1 - x^3}{x - \sqrt{x}} = \frac{-(\sqrt{x} + 1)(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -2 \times 3 = -6.$$

3. Numérateur : $\frac{(x+5) - (2x+1)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1}} = \frac{4-x}{\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1}}$. Dénominateur : $x\sqrt{x} - 8 = (\sqrt{x})^3 - 2^3 = (\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)$ et $\sqrt{x} - 2 = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$. D'où

$$\frac{4-x}{\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{(x-4)(x+2\sqrt{x}+4)} = \frac{-(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1})(x+2\sqrt{x}+4)}.$$

$$\text{En } x = 4 : \frac{-4}{6 \times 12} = -\frac{1}{18}.$$

4. En conjuguant les deux :

$$\frac{\frac{(x+1) - (7-x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}}}{\frac{(2x+3) - (15-2x)}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{15-2x}}} = \frac{2x-6}{4x-12} \cdot \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{15-2x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{15-2x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}}.$$

$$\text{En } x = 3 : \frac{1}{2} \cdot \frac{3+3}{2+2} = \frac{3}{4}. \blacksquare$$

2. Formes $\infty - \infty$ à l'infini

Méthode — Le protocole en trois temps

Pour $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{P(x)} - \alpha x - \beta)$ avec P de degré 2 :

1. **Comparer les termes dominants.** $\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim |x|\sqrt{a}$. Si $\sqrt{a} \neq |\alpha|$ (au signe près), la limite est $\pm\infty$: c'est fini.
2. **Si les termes dominants se compensent**, conjuguer : $\sqrt{P(x)} - \alpha x = \frac{P(x) - \alpha^2 x^2}{\sqrt{P(x)} + \alpha x}.$
3. **Factoriser par x en haut et par $|x|$ en bas**, puis conclure.

Exercice 6 — Discussion selon deux paramètres

★★★★☆ Classique

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Discuter, selon les valeurs de α et β , la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - \alpha x - \beta)$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ de la même expression.

2. Applications : calculer

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x + 3)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x + 3)$;
 (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 5x + 4} + 3x + 2)$.

Correction

1. En $+\infty$: $\sqrt{4x^2 - 3x + 2} = x\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \sim 2x$.

► Si $\alpha \neq 2$: $\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - \alpha x \sim (2 - \alpha)x$, la limite est $+\infty$ si $\alpha < 2$, $-\infty$ si $\alpha > 2$.

► Si $\alpha = 2$: on conjugue, $\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - 2x = \frac{-3x + 2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + 2x} = \frac{x(-3 + \frac{2}{x})}{x(\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2)} \rightarrow \frac{-3}{4}$. La limite vaut donc $-\frac{3}{4} - \beta$ (finie pour tout β).

En $-\infty$: cette fois $\sqrt{4x^2 - 3x + 2} = -x\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \sim -2x$. Le cas de compensation est $\alpha = -2$, et la conjugaison donne alors $\frac{-3x + 2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - 2x} = \frac{x(-3 + \frac{2}{x})}{-x(\sqrt{4 - \dots} + 2)} \rightarrow \frac{3}{4}$; la limite vaut $\frac{3}{4} - \beta$. Pour $\alpha \neq -2$ la limite est infinie.

2.(a) Ici $\sqrt{x^2 - x + 1} \sim |x|$. En $+\infty$: $\sim x - 2x = -x \rightarrow -\infty$. En $-\infty$: $\sim -x - 2x = -3x \rightarrow +\infty$. Pas de compensation dans les deux cas.

(b) En $-\infty$, $\sqrt{9x^2 - 5x + 4} \sim -3x$ et $-3x + 3x = 0$: compensation.

$$\sqrt{9x^2 - 5x + 4} + 3x = \frac{-5x + 4}{\sqrt{9x^2 - 5x + 4} - 3x} = \frac{x(-5 + \frac{4}{x})}{-x(\sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} + 3)} \rightarrow \frac{5}{6}.$$

La limite cherchée vaut $\frac{5}{6} + 2 = \frac{17}{6}$. ■

Exercice 7 — Combinaisons de racines

★★★ Classique

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - 2\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 + x + 1})$.
- Même question en remplaçant le coefficient 2 par un paramètre $m \in \mathbb{R}$; discuter selon m .
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 5\sqrt{2x+2} + \sqrt{x+3} + 6x}{\sqrt{5x+4} - \sqrt{6x+3}}$.

Correction

1. On regroupe astucieusement pour former deux différences :

$$E(x) = \underbrace{(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})}_{A(x)} + \underbrace{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})}_{B(x)}.$$

Or $A(x) = \frac{-3x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} \rightarrow \frac{-3}{2}$ et $B(x) = \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} \rightarrow \frac{-1}{2}$. Donc $E(x) \rightarrow -2$.

2. Avec m quelconque, le terme dominant est $(1 - m + 1)x = (2 - m)x$. Si $m \neq 2$ la limite est $\pm\infty$ (signe de $2 - m$); si $m = 2$ on retrouve le cas précédent et la limite vaut -2 .

3. Numérateur $N(x)$ et dénominateur $D(x)$ s'annulent en 1 ($N(1) = 2 - 10 + 2 + 6 = 0$,

$D(1) = 3 - 3 = 0$). On écrit chaque racine sous la forme $\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(1)} = \frac{u(x)-u(1)}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(1)}}$, puis on divise tout par $x - 1$:

$$\frac{N(x)}{x-1} \rightarrow \frac{3}{2 \cdot 2} - 5 \cdot \frac{2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + 6 = \frac{3}{4} - \frac{5}{2} + \frac{1}{4} + 6 = \frac{9}{2}, \quad \frac{D(x)}{x-1} \rightarrow \frac{5}{2 \cdot 3} - \frac{6}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{6}.$$

D'où la limite $\frac{9/2}{-1/6} = -27$. ■

Astuce — Le « théorème du taux d'accroissement » déguisé

Dans la question 3, chaque calcul du type $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(1)}}{x - 1}$ n'est rien d'autre que la dérivée en 1 de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, c'est-à-dire $\frac{u'(1)}{2\sqrt{u(1)}}$. C'est *beaucoup* plus rapide que de conjuguer terme à terme — on y reviendra en Partie III.

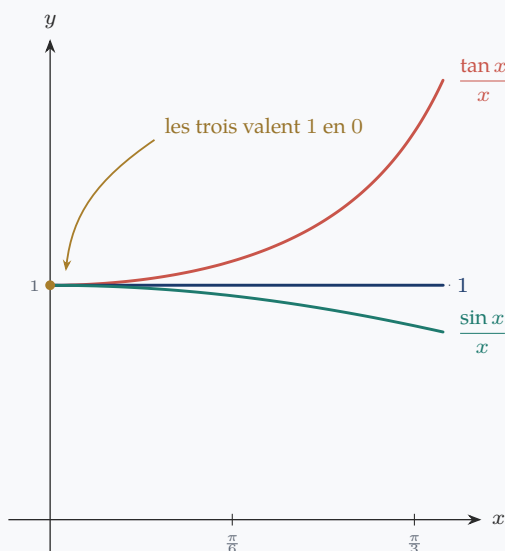
Chapitre 5 — Limites trigonométriques

Boîte à outils — Les trois limites de référence

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$$

□ Les trois courbes se rejoignent en 1 : voilà pourquoi la limite vaut 1



Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin x < x < \tan x$, donc $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Les deux gendarmes $\cos x$ et 1 tendent vers 1 : le prisonnier n'a pas le choix. Retenez l'image : **près de 0, le sinus est l'identité**.

Méthode — Le changement de variable qui ramène en 0

Toutes ces limites sont *en 0*. Face à $\lim_{x \rightarrow a}$ avec de la trigonométrie, posez systématiquement

$h = x - a$ et développez avec les formules d'addition. Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \stackrel{h=x-\pi}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{h} = -1.$$

Astuce — Les trois identités qui débloquent tout

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

La deuxième et la troisième transforment une *différence* (forme indéterminée) en *produit* (calculable). Réflexe absolu.

Exercice 8 — Batterie de limites trigonométriques

★★☆☆ Basique

Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3};$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2};$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1};$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\tan(x^2 - 3x)}{x - 3};$

5. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}};$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x - 1};$

7. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \sin x) \tan x;$

8. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}}.$

Correction

1. $\sin 2x - 2 \sin x = 2 \sin x (\cos x - 1)$, donc $\frac{2 \sin x}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$

2. $\cos 2x - \cos 4x = 2 \sin 3x \sin x$, donc $\frac{2 \sin 3x \sin x}{x^2} = 2 \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow 2 \times 3 \times 1 = 6.$

3. $h = x - 1 : \frac{\sin(\pi + \pi h)}{h} = \frac{-\sin(\pi h)}{h} \rightarrow -\pi.$

4. $x^2 - 3x = x(x - 3)$, donc $\frac{\tan(x(x - 3))}{x(x - 3)} \cdot x \rightarrow 1 \times 3 = 3.$

5. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$, d'où la limite 2.

6. $h = x - 1 : \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}h)}{h} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}h)}{h} \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$

7. $h = x - \frac{\pi}{2} : 1 - \sin x = 1 - \cos h$ et $\tan x = -\cot h = -\frac{\cos h}{\sin h}$, donc $(1 - \cos h) \cdot \frac{-\cos h}{\sin h} = -\frac{1 - \cos h}{h^2} \cdot \frac{h}{\sin h} \cdot h \cos h \rightarrow -\frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0.$

8. C'est le taux d'accroissement de $x \mapsto 2 \cos x$ en $\frac{\pi}{4}$: la limite vaut $-2 \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$. ■

Astuce — Reconnaître $a \sin x + b \cos x$

$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$. Dans la question 5, $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$: le point $\frac{\pi}{6}$ où l'on calcule la limite apparaît directement. Chaque fois qu'un énoncé fait tendre x vers un angle remarquable, cherchez cette écriture.

Exercice 9 — Limites trigonométriques d'ordre supérieur

★★★★ Important

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n x}{1 - \cos^m x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x - 3}{x^2}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cdots \cos(nx)}{x^2}$;
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \cdots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$;
- $\lim_{x \rightarrow a} (a - x) \tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Correction

1. Avec $c = \cos x$: $1 - c^n = (1 - c)(1 + c + \cdots + c^{n-1})$, donc

$$\frac{1 - c^n}{1 - c^m} = \frac{1 + c + \cdots + c^{n-1}}{1 + c + \cdots + c^{m-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{n}{m}.$$

$$2. \frac{\sum_{k=1}^3 (\cos kx - 1)}{x^2} = - \sum_{k=1}^3 \frac{1 - \cos kx}{x^2} \rightarrow - \frac{1 + 4 + 9}{2} = -7.$$

$$3. \frac{(1 - \cos bx) - (1 - \cos ax)}{x^2} \rightarrow \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

4. Notons $P_n = \cos x \cos 2x \cdots \cos nx$. On télescope :

$$1 - P_n = \sum_{k=1}^n (P_{k-1} - P_k) = \sum_{k=1}^n P_{k-1} (1 - \cos kx), \quad \text{avec } P_0 = 1.$$

Comme $P_{k-1} \rightarrow 1$ et $\frac{1 - \cos kx}{x^2} \rightarrow \frac{k^2}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - P_n}{x^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

(La variante avec $\cos^2$ à la place de $\cos$ double le résultat : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

5. Posons $s = \sin x \rightarrow 1$ et rappelons $\cos^2 x = 1 - s^2 = (1 - s)(1 + s)$. Chacun des n facteurs vaut $1 - s^k = (1 - s)(1 + s + \cdots + s^{k-1})$, donc

$$\frac{\prod_{k=1}^n (1 - s^k)}{\cos^{2n} x} = \frac{(1 - s)^n \prod_{k=1}^n (1 + s + \cdots + s^{k-1})}{(1 - s)^n (1 + s)^n} = \frac{\prod_{k=1}^n (1 + s + \cdots + s^{k-1})}{(1 + s)^n} \xrightarrow{s \rightarrow 1} \frac{n!}{2^n}.$$

6. $h = x - a$, $\frac{\pi x}{2a} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2a}$, donc $\tan \frac{\pi x}{2a} = -\cot \frac{\pi h}{2a}$ et

$$(a - x) \tan \frac{\pi x}{2a} = h \cot \frac{\pi h}{2a} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi h}{2a}}{\tan \frac{\pi h}{2a}} \rightarrow \frac{2a}{\pi}. \blacksquare$$

Astuce — Le télescopage multiplicatif

La question 4 illustre une technique précieuse : pour évaluer $1 - u_1 u_2 \cdots u_n$ quand chaque $u_k \rightarrow 1$, écrivez

$$1 - \prod_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j < k} u_j \right) (1 - u_k).$$

On transforme un produit récalcitrant en *somme* de termes que l'on sait traiter. Cette idée est le cœur de nombreux exercices de concours.

Chapitre 6 — Ordre, encadrements et partie entière

Théorème — Théorème des gendarmes

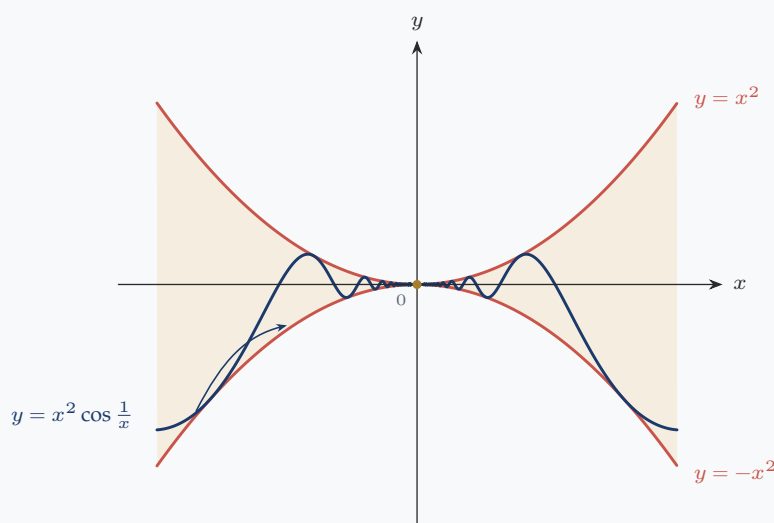
Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Version « borné $\times$ petit » : si f est **bornée** au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Piège à éviter

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$ **ne se démontre pas** en écrivant « $\cos \frac{1}{x} \rightarrow$ quelque chose ». Cette limite *n'existe pas* ! Il faut écrire $|x^2 \cos \frac{1}{x}| \leq x^2 \rightarrow 0$. Un facteur borné n'a pas besoin d'avoir une limite.

Le théorème des gendarmes en action



La courbe oscille une infinité de fois près de 0 : $\cos \frac{1}{x}$ n'a aucune limite. Mais elle est prisonnière du couloir doré, qui se referme sur 0 : la limite du produit est donc 0. Tout l'esprit de la méthode est là — on ne calcule pas, on **enferme**.

Définition — Partie entière

Pour $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ (ou $\lfloor x \rfloor$) est l'unique entier vérifiant

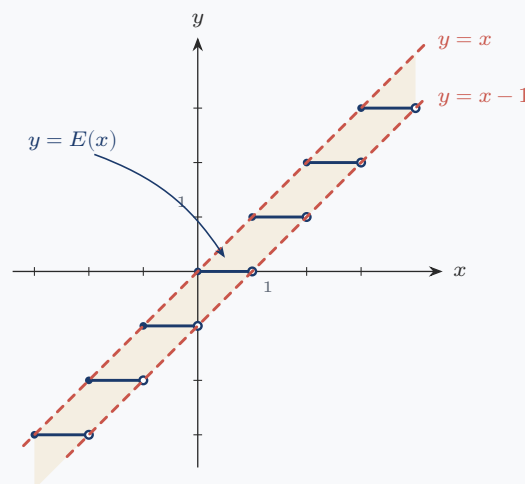
$$E(x) \leq x < E(x) + 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x - 1 < E(x) \leq x.$$

À retenir — L'encadrement universel

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < E(x) \leq x$$

Toute limite contenant une partie entière se traite avec cet encadrement, jamais autrement. C'est le seul outil dont vous disposez : E n'est ni continue, ni monotone au sens strict, ni dérivable.

□ La partie entière, prise en sandwich entre $x - 1$ et x



L'escalier reste toujours dans la bande dorée : $x - 1 < E(x) \leq x$. Divisez cet encadrement par x et faites tendre x vers $+\infty$: les deux bords tendent vers 1, donc $\frac{E(x)}{x} \rightarrow 1$. Un seul dessin, et toutes les limites avec E deviennent évidentes.

Méthode — Limite d'une expression avec E

1. Encadrer $E(u)$ par $u - 1 < E(u) \leq u$.
2. Multiplier par le facteur restant en surveillant son signe : c'est ici que se joue tout l'exercice.
3. Faire tendre les deux bornes et appliquer les gendarmes.

Exercice 10 — Encadrements élémentaires

☆☆☆☆ Basique

Calculer :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x); \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Correction

1. $x - 1 \leq x + \sin x$ et $x - 1 \rightarrow +\infty$, donc la limite est $+\infty$ (minoration suffit).
2. $|x^2 \cos \frac{1}{x}| \leq x^2 \rightarrow 0$, donc la limite est 0.
3. $|\frac{\sin x}{x}| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc la limite est 0. ■

Exercice 11 — Une minoration à construire

☆☆☆☆ Classique

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} < -2x$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x \sin x}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$.

Correction

1. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - (x^2 + 1)} = -(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Or pour $x \geq 0$ on a $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = x$, donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > 2x$, c'est-à-dire $-(x + \sqrt{x^2 + 1}) < -2x$. ✓

2. Pour $x > 0$, $3 - \sin x \geq 2 > 0$ donc $3x - x \sin x = x(3 - \sin x) \geq 2x > 0$. Comme $\frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} < -2x < 0$, en multipliant l'inégalité positive par ce nombre négatif :

$$\frac{3x - x \sin x}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \leq 2x \times (-2x) = -4x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

La limite vaut donc $-\infty$. ■

Piège à éviter

Étape critique de la question 2 : on multiplie une inégalité par une quantité **négative**, donc le sens de l'inégalité s'inverse. Écrivez toujours explicitement le signe du facteur avant de multiplier.

Exercice 12 — Partie entière et limites

★★★★☆ Classique

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xE(x)$.

3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\alpha} E\left(\frac{\beta}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(x - E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Correction

1. Encadrons : $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.

► Si $x > 0$: en multipliant par $x > 0$, $1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$.

► Si $x < 0$: en multipliant par $x < 0$, $1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$.

Dans les deux cas les bornes tendent vers 1 quand $x \rightarrow 0$: la limite est 1.

En $\pm\infty$: dès que $|x| > 1$, $\frac{1}{x} \in]-1, 1[$, donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ si $0 < \frac{1}{x} < 1$ (c'est-à-dire $x > 1$) et $E\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ si $-1 < \frac{1}{x} < 0$ (c'est-à-dire $x < -1$). Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty.$$

2. $x - 1 < E(x) \leq x$. En $+\infty$ ($x > 0$) : $x(x - 1) < xE(x)$, donc $+\infty$. En $-\infty$ ($x < 0$) : $x \cdot x \leq xE(x) < x(x - 1)$, et $x^2 \rightarrow +\infty$, donc $+\infty$. Dans les deux cas la limite est $+\infty$.

3. On encadre $\frac{\beta}{x} - 1 < E\left(\frac{\beta}{x}\right) \leq \frac{\beta}{x}$ (si $\beta \neq 0$) ; en multipliant par $\frac{x}{\alpha}$ (signe à discuter) les deux

bornes tendent vers $\frac{\beta}{\alpha}$: la limite est $\frac{\beta}{\alpha}$. (Si $\beta = 0$ l'expression est nulle, et $\frac{\beta}{\alpha} = 0$: la formule reste valable.)

Enfin $\sin x \cdot x \rightarrow 0$ et $\sin x \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} \cdot x E\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1 \times 1 = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(x - E\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -1$.

■

Astuce — La bonne réaction devant E

Ne cherchez jamais à «calculer» E : cherchez sur quel **intervalle** $E(u)$ est constant. Pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} x E\left(\frac{1}{x}\right)$, remarquer que $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ pour $x > 1$ règle la question en une ligne, sans aucun encadrement.

Exercice 13 — Partie entière : étude locale fine

★★★★ Important

Soit f définie par $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

(a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x et k pour $x \in]k^2, (k+1)^2[$ puis pour $x \in [(k-1)^2, k^2[$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow (k^2)^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (k^2)^-} f(x)$. La fonction f est-elle continue en k^2 ?

Correction

1. Il faut $x \geq 0$ (racine) et $x \neq 0$ (dénominateur) : $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

2. $\sqrt{x} - 1 < E(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}$, donc pour $x > 0$: $\frac{\sqrt{x} - 1}{x} < f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Les deux bornes tendent vers 0 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3.(a) Si $x \in]k^2, (k+1)^2[$ alors $\sqrt{x} \in]k, k+1[$ donc $E(\sqrt{x}) = k$ et $f(x) = \frac{k}{x}$. Si $x \in [(k-1)^2, k^2[$ alors $\sqrt{x} \in [k-1, k[$ donc $f(x) = \frac{k-1}{x}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow (k^2)^+} f(x) = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$ et $\lim_{x \rightarrow (k^2)^-} f(x) = \frac{k-1}{k^2}$. Ces deux valeurs diffèrent (leur écart vaut $\frac{1}{k^2} \neq 0$) : f n'admet pas de limite en k^2 , elle y présente un saut. ■

Exercice 14 — Une somme de parties entières

★★★★ Important

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{E(kx)}{n^2}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Correction

Pour chaque k : $kx - 1 < E(kx) \leq kx$. En sommant pour k de 1 à n :

$$x \frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq x \frac{n(n+1)}{2}.$$

En divisant par $n^2 > 0$:

$$\frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < S_n \leq \frac{x(n+1)}{2n}.$$

Les deux membres tendent vers $\frac{x}{2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{x}{2}$. ■

Astuce — Pourquoi n^2 au dénominateur ?

L'erreur commise en remplaçant chaque $E(kx)$ par kx est au plus 1 par terme, soit au plus n au total. Divisée par n^2 , cette erreur globale tend vers 0 : c'est exactement ce qui rend le calcul possible. Retenez ce raisonnement en « ordre de grandeur de l'erreur », il est fondamental.

Chapitre 7 — Définitions formelles des limites

À retenir

Ces définitions ne servent pas à *calculer* des limites — elles servent à en *démontrer* l'existence quand aucun théorème ne s'applique, et surtout à comprendre ce que signifie « tendre vers ». Elles seront le socle de toute l'analyse en classes préparatoires. Apprenez-les mot à mot.

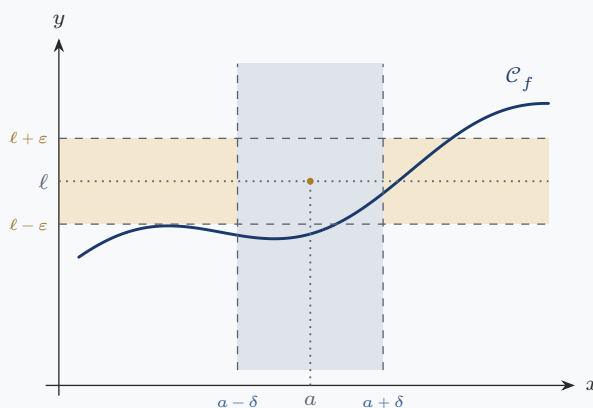
Définition — Limite finie en un point

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Pour la limite **à droite**, on remplace $|x - a| < \delta$ par $a < x < a + \delta$; pour la limite **à gauche**, par $a - \delta < x < a$.

□ Ce que dit vraiment « $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ »



Règle du jeu : l'adversaire choisit la bande horizontale ε (aussi fine qu'il veut) ; vous devez répondre par une bande verticale δ telle que tout le morceau de courbe au-dessus de la bande bleue tienne dans la bande dorée. Si vous gagnez à chaque fois, la limite vaut ℓ .

Définition — Limites infinies en un point

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta \implies f(x) > A;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta \implies f(x) < -A.$$

Interprétation géométrique : la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Définition — Limites à l'infini

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell & : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell & : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty & : \quad \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > B \Rightarrow f(x) > A.\end{aligned}$$

Les trois autres cas ($\pm\infty$ en $\pm\infty$) s'obtiennent en changeant les signes de façon analogue.

Interprétation géométrique : dans les deux premiers cas, la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$.

Méthode — Comment rédiger une preuve « en ε »

On veut montrer $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$.

1. *Analyse (au brouillon) :* $|f(x) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2|$. Pour rendre ceci $< \varepsilon$, il suffit que $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$.
2. *Rédaction :* « Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$. Alors pour tout x tel que $|x - 2| < \delta$, on a $|f(x) - 5| = 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon$. » ■

La règle absolue : δ est *fabriqué à partir de ε* , jamais l'inverse. On cherche δ au brouillon, on l'annonce dans la copie.

Piège à éviter

Ne jamais écrire « $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$ ». L'ordre des quantificateurs est **le** contenu de la définition : δ dépend de ε (plus ε est petit, plus δ doit l'être). Inverser l'ordre produit un énoncé faux et vide de sens.



TROISIÈME PARTIE

Dérivation

Nombre dérivé et tangente, formulaire complet, dérivées successives et récurrence, applications aux inégalités et aux extremums, premières équations différentielles.

Chapitre 8 — Nombre dérivé et interprétations

Définition — Dérivabilité en un point

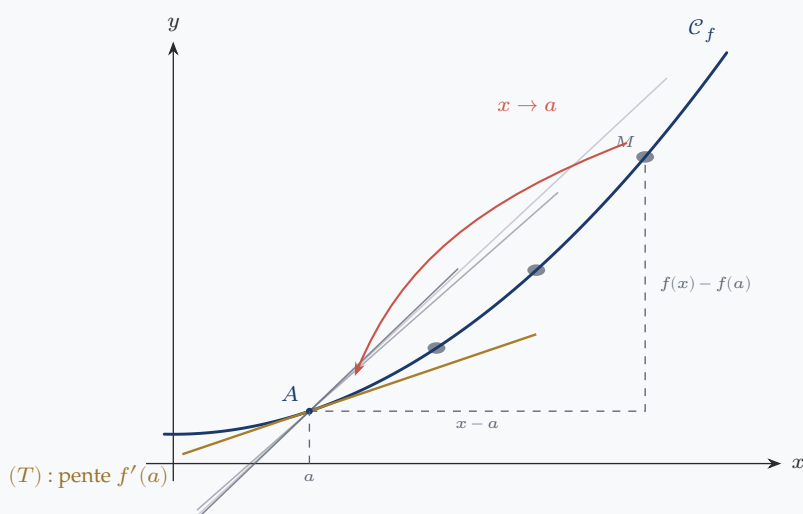
Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant a . On dit que f est **dérivable en a** lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \in \mathbb{R} \quad \left(\text{ou, en posant } h = x - a, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \ell \right).$$

On note alors $f'(a) = \ell$, appelé **nombre dérivé de f en a** . L'équation de la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

La sécante bascule vers la tangente : naissance du nombre dérivé



Le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la sécante (AM) . Quand M glisse vers A , les sécantes basculent vers une position limite : la tangente, de pente $f'(a)$. Voilà pourquoi « dérivée » et « tangente » désignent le même objet.

Propriété — Dérivabilité à droite, à gauche

- $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$: demi-tangente à droite, de pente $f'_d(a)$, tracée pour $x \geq a$.
- $f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$: demi-tangente à gauche, tracée pour $x \leq a$.
- f est dérivable en $a \iff f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent, sont finies et égales.

À retenir — Vocabulaire des points remarquables

Soit a un point où f est continue mais non dérivable.

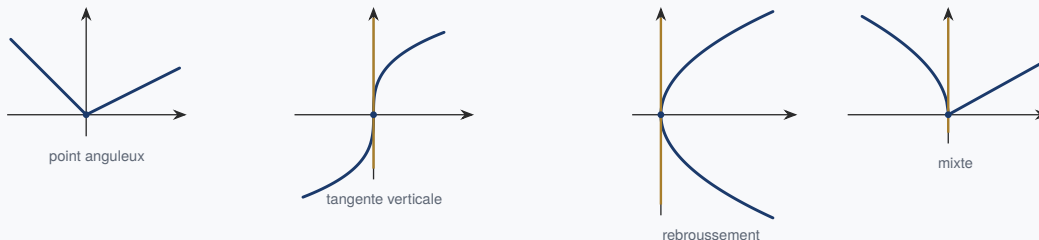
Situation	Nom	Aspect de la courbe
$f'_d(a), f'_g(a)$ finies, distinctes	Point anguleux	Deux demi-tangentes obliques formant un angle
$f'_d(a) = f'_g(a) = \pm\infty$ (même signe)	Tangente verticale	Tangente verticale, courbe « traversante »
$f'_d(a) = +\infty, f'_g(a) = -\infty$ (ou l'inverse)	Point de rebroussement	Deux demi-tangentes verticales du même côté
Une finie, une infinie	Point anguleux (mixte)	Une demi-tangente oblique, une verticale

Méthode — Orienter une demi-tangente verticale

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$, la demi-tangente est verticale **vers le haut** ; si la limite est $-\infty$, elle est **vers le bas**. À gauche, tout s'inverse : $\lim_{x \rightarrow a^-} = +\infty$ donne une demi-tangente vers le **bas**.

Mnémotechnique : signes *identiques* (côté et infini) $\Rightarrow$ vers le haut ; signes *opposés* $\Rightarrow$ vers le bas.

Les quatre comportements en un point de non-dérivabilité



De gauche à droite : deux pentes finies distinctes ; deux demi-tangentes verticales de même orientation ; deux demi-tangentes verticales opposées ; une pente finie et une demi-tangente verticale.

Piège à éviter

« f dérivable $\Rightarrow f$ continue » est vrai ; la réciproque est **fausse** ($x \mapsto |x|$ en 0). Avant d'étudier la dérivabilité en a , vérifiez toujours d'abord la *continuité* en a : si f n'est pas continue en a , elle n'y est pas dérivable, inutile de calculer quoi que ce soit.

1. Le nombre dérivé comme outil de calcul de limites

Méthode — Reconnaître un taux d'accroissement

Devant une limite de la forme $\frac{0}{0}$ en un point a , demandez-vous : « Puis-je écrire cette expression comme $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$? » Si oui, la limite est $f'(a)$ et le calcul est terminé en une ligne.

Signe caractéristique : le dénominateur est $x - a$ (ou un multiple), et le numérateur s'annule en a .

Théorème — Règle du quotient des dérivées

Soient f et g dérivables en x_0 avec $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Correction — Démonstration

Pour $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}.$$

Le numérateur tend vers $f'(x_0)$, le dénominateur vers $g'(x_0) \neq 0$; par quotient de limites, on conclut. ■

Astuce

C'est une version élémentaire de la *règle de l'Hôpital*, dont vous verrez la forme générale en prépa. Retenez-la sous cette forme : elle transforme un calcul de limite pénible en deux dérivations immédiates.

Exercice 1 — Limites par le nombre dérivé★★★★ **Basique**

Calculer, en reconnaissant un taux d'accroissement :

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 25} - \sqrt{10}}{x - 3};$

2. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi};$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x + 1)^{2020} - 1}{x};$

4. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 x}{2x - \pi};$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + x^2}{x - 1};$

6. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x^2 \cos x}{2x - \pi};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{x}.$

Correction

1. Avec $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 25}$, $f(3) = \sqrt{10}$ et $f'(x) = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+25}}$, donc $f'(3) = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

2. $f = \sin$, $a = \pi$: la limite est $\cos \pi = -1$.

3. $f(x) = (3x + 1)^{2020}$, $f(0) = 1$, $f'(x) = 3 \cdot 2020(3x + 1)^{2019}$: la limite vaut 6060.

4. $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = 2x - \pi$: $f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$ donc $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, et $g' = 2$. La limite vaut $\frac{0}{2} = 0$.

5. $f(x) = \cos(\pi x) + x^2$: $f(1) = -1 + 1 = 0$ ✓, $f'(x) = -\pi \sin(\pi x) + 2x$, $f'(1) = 2$. Limite : 2.

6. $f(x) = x^2 \cos x$, $g(x) = 2x - \pi$: $f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$ donc $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{4}$, d'où la limite $-\frac{\pi^2}{8}$.

7. $f(x) = \sqrt{1+x} - \cos x$, $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \sin x$, $f'(0) = \frac{1}{2}$. Limite : $\frac{1}{2}$. ■

Exercice 2 — Différences de racines★★★★ **Classique**

Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x - 1};$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^3 + x^2 - 2x + 7}}{x - 2};$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x^2 - 4x + 3}.$

Correction

Principe. Posons $\varphi(x) = \sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}$ avec $u(a) = v(a)$: alors $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}} -$

$$\frac{v'(a)}{2\sqrt{v(a)}} = \frac{u'(a) - v'(a)}{2\sqrt{u(a)}}.$$

1. $u = x^2 - 2x + 3, v = x^2 + 2x - 1, u(1) = v(1) = 2; u'(1) = 0, v'(1) = 4$. Limite $= \frac{0 - 4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

2. $u(2) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15, v(2) = 8 + 4 - 4 + 7 = 15$ ✓; $u' = 3x^2 + 2x + 1$ donc $u'(2) = 17$;
 $v' = 3x^2 + 2x - 2$ donc $v'(2) = 14$. Limite $= \frac{17 - 14}{2\sqrt{15}} = \frac{3}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$.

3. $u(1) = v(1) = 5; u'(1) = 0, v'(1) = 4$. Le dénominateur se factorise : $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Donc

$$\frac{\varphi(x)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{1}{x - 3} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{-2} \cdot \frac{0 - 4}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chapitre 9 — Formulaire et opérations

Boîte à outils — Dérivées usuelles et formes composées

$f(x)$	Domaine de f'	$f'(x)$	Forme composée
k	$\mathbb{R}$	0	$(ku)' = k u'$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$	$(u^n)' = n u' u^{n-1}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}_-$	$\mathbb{R}^*$	$n x^{n-1}$	$\left(\frac{1}{u^m}\right)' = \frac{-m u'}{u^{m+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$a \cos(ax + b)$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$-a \sin(ax + b)$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$1 + \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$

Propriété — Opérations

Soient u, v dérivables (avec v ne s'annulant pas là où c'est nécessaire) :

$$(u + v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Astuce — Le réflexe « $u = \frac{1}{v}$ »

Quand une fonction u est une fraction compliquée, il est souvent bien plus rapide de dériver $v = \frac{1}{u}$ (souvent très simple) puis d'utiliser $u' = -\frac{v'}{v^2}$. C'est exactement le but des trois exercices suivants.

Exercice 3 — Dériver en passant par l'inverse

★★☆☆ Basique

1. Sur $]0, 1[$, on pose $u(x) = \frac{x^2}{x^3 + x^2 - 2}$ et $v(x) = x + 1 - \frac{2}{x^2}$. Dériver v , puis en déduire u' .
2. Sur $]0, 1[$, on pose $u(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 - 2}$ et $v(x) = x^2 - \frac{2}{x^2 + 1}$. Dériver v , puis en déduire u' .
3. On pose $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$. Dériver g , puis en déduire f' .

Correction

1. $v(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2} = \frac{1}{u(x)}$, et $v'(x) = 1 + \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 + 4}{x^3}$. Donc

$$u' = \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{\frac{x^3 + 4}{x^3}}{\left(\frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2}\right)^2} = -\frac{x(x^3 + 4)}{(x^3 + x^2 - 2)^2}.$$

2. $v(x) = \frac{x^2(x^2 + 1) - 2}{x^2 + 1} = \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{1}{u(x)}$, et $v'(x) = 2x + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x[(x^2 + 1)^2 + 2]}{(x^2 + 1)^2}$. D'où

$$u' = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{2x[(x^2 + 1)^2 + 2]}{(x^4 + x^2 - 2)^2}.$$

3. Clé : $(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = x + 1$, donc

$$f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \sqrt{x^2 + x + 1} + x = \frac{1}{g(x)}.$$

Or $g'(x) = -\frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + 1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)^2}$, et plus simplement, en dérivant directement $f = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$:

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} + 1 = \frac{2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}. \blacksquare$$

Exercice 4 — Dérivabilité de fonctions irrationnelles

★★★★ Basique

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .
2. Soit $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .
3. Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$. Montrer que g est dérivable sur $] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{x g(x)}{\sqrt{x^4 - 1}}$.
4. Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$. Montrer de même que $g'(x) = -\frac{x g(x)}{\sqrt{x^4 - 1}}$.
5. Soit $h(x) = \sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1}$. Montrer que h est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $h'(x) =$

$$-\frac{3x^2 h(x)}{2\sqrt{x^6-1}}.$$

Correction

1. $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $-3 < 0$ et un coefficient dominant positif : il est *strictement* positif sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$.

2. $f = u\sqrt{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$. Alors $f' = u'\sqrt{u} + u \cdot \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3}{2}u'\sqrt{u} = 3x\sqrt{x^2+1}$.

3. Sur $|x| > 1$ on a $x^2 - 1 > 0$, donc g est dérivable et

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = x \cdot \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)(x^2-1)}} = \frac{xg(x)}{\sqrt{x^4-1}}.$$

4. Le même calcul avec un signe $-$:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = x \cdot \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{-xg(x)}{\sqrt{x^4-1}}.$$

5. Sur $]1, +\infty[$, $x^3 \pm 1 > 0$ et

$$h'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} = \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^6-1}} = -\frac{3x^2 h(x)}{2\sqrt{x^6-1}}. \blacksquare$$

Chapitre 10 — Dérivées successives et récurrence**Définition — Dérivée n -ième**

On pose $f^{(0)} = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ (lorsque cela a un sens). On note aussi $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Méthode — Trouver puis prouver une formule pour $f^{(n)}$

1. **Calculer f' , f'' , f''' sans simplifier trop tôt** : il faut voir apparaître le motif $((-1)^n, n!,$ une puissance...).
2. **Conjecturer** la formule générale.
3. **Démontrer par récurrence** : initialisation à $n = 0$, puis on *dérive* l'hypothèse de récurrence.

Piège classique : initialiser à $n = 1$ alors que l'énoncé dit $\forall n \in \mathbb{N}$. On doit vérifier $n = 0$, c'est-à-dire $f^{(0)} = f$.

Exercice 5 — Dérivée n -ième d'une fraction★★★★ **Classique**

Soient $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$, et $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{D}_f, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

3. Soit $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

(a) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}$ sur $\mathcal{D}_g$.

(b) En déduire $g^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Correction

1. $f'(x) = \frac{-a}{(ax+b)^2}$ et $f''(x) = \frac{2a^2}{(ax+b)^3}$.

2. Initialisation ($n = 0$) : $\frac{(-1)^0 0! a^0}{(ax+b)^1} = \frac{1}{ax+b} = f(x)$ ✓.

Hérédité : supposons la formule vraie au rang n . En dérivant,

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! a^n \cdot \left[(ax+b)^{-(n+1)} \right]' = (-1)^n n! a^n \cdot (-(n+1))a (ax+b)^{-(n+2)},$$

soit $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! a^{n+1}}{(ax+b)^{n+2}}$: c'est la formule au rang $n+1$. ✓

3.(a) $\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} = \frac{(\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta)}{x^2-1}$. Par identification : $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

(b) On applique deux fois la question 2 (avec $a = 1, b = \mp 1$) :

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]. \blacksquare$$

Astuce — Décomposition en éléments simples

Écrire une fraction rationnelle comme somme de termes $\frac{\alpha}{x-r}$ transforme un calcul impossible en une somme de calculs triviaux. C'est LA technique à retenir de cet exercice. Astuce de calcul rapide : pour trouver α , multipliez par $(x-1)$ puis faites $x = 1$: $\alpha = \left[\frac{x}{x+1} \right]_{x=1} = \frac{1}{2}$. Idem pour β en $x = -1$.

Exercice 6 — Une forme stable par dérivation

★★★★ Classique

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

2. Montrer par récurrence qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un polynôme P_n de degré n tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

3. Établir la relation de récurrence $P_{n+1} = (1+x^2)P'_n - 2(n+1)xP_n$ et retrouver P_0, P_1, P_2, P_3 .

Correction

1. $f' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, $f^{(3)} = \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}$.

2.-3. Initialisation : $P_0 = 1$, de degré 0. ✓

Hérédité : si $f^{(n)} = \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+1}}$ avec $\deg P_n = n$, alors

$$f^{(n+1)} = \frac{P'_n(1+x^2)^{n+1} - P_n(n+1)(1+x^2)^n \cdot 2x}{(1+x^2)^{2n+2}} = \frac{\overbrace{(1+x^2)P'_n - 2(n+1)xP_n}^{=:P_{n+1}}}{(1+x^2)^{n+2}}.$$

Degré : $(1+x^2)P'_n$ est de degré $n+1$ (coefficient dominant $n\lambda_n$), et $-2(n+1)xP_n$ est de degré $n+1$ (coefficient $-2(n+1)\lambda_n$). Le coefficient dominant de P_{n+1} vaut donc $\lambda_n(n-2(n+1)) = -(n+2)\lambda_n \neq 0$: $\deg P_{n+1} = n+1$. ✓

Applications : $P_1 = -2x$, $P_2 = 6x^2 - 2$, $P_3 = -24x^3 + 24x$. ■

Remarque

Les P_n sont, à normalisation près, les *polynômes de Tchebychev de seconde espèce* composés avec arctan. Vous les recroiserez en prépa.

Exercice 7 — Polynômes de Legendre

★★★★ Important

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$. Calculer $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

Correction

$$n = 1 : P_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} (x^2 - 1)' = \frac{2x}{2} = x.$$

$$n = 2 : (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1, \text{ de dérivée seconde } 12x^2 - 4, \text{ donc } P_2 = \frac{12x^2 - 4}{4 \cdot 2} = \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

$$n = 3 : (x^2 - 1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1, \text{ de dérivée troisième } 120x^3 - 72x, \text{ donc } P_3 = \frac{120x^3 - 72x}{8 \cdot 6} = \frac{5x^3 - 3x}{2}. \blacksquare$$

Remarque

Ce sont les **polynômes de Legendre**, définis par la *formule de Rodrigues*. Ils vérifient $P_n(1) = 1$ pour tout n — un excellent test de vérification : $P_2(1) = \frac{3-1}{2} = 1$ ✓, $P_3(1) = \frac{5-3}{2} = 1$ ✓.

Exercice 8 — Relations différentielles

★★★★ Important

1. Soit $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2\sqrt{x^2 + 1} f'(x) = f(x)$.

(b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, 4(x^2 + 1)f''(x) = f(x) - 4x f'(x)$.

2. Soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f''(x) + 3x f'(x) = 0$.

(b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(3)}(x) + 5x f''(x) + 3f'(x) = 0$.

Correction

1.(a) Notons $s = \sqrt{1+x^2}$, de sorte que $f^2 = x + s$ et $s' = \frac{x}{s}$. En dérivant $f^2 = x + s$:

$$2ff' = 1 + \frac{x}{s} = \frac{s+x}{s} = \frac{f^2}{s}.$$

Comme $f > 0$ (car $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ pour tout x), on simplifie par f : $2f' = \frac{f}{s}$, c'est-à-dire $2\sqrt{x^2+1}f' = f$. ✓

(b) On dérive $2sf' = f$: $2s'f' + 2sf'' = f'$, soit $\frac{2x}{s}f' + 2sf'' = f'$. En multipliant par $2s$: $4xf' + 4s^2f'' = 2sf' = f$, d'où $4(x^2+1)f'' = f - 4xf'$. ✓

2.(a) $f = x(1+x^2)^{-1/2}$ donne

$$f' = (1+x^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2)^{-3/2} = (1+x^2)^{-3/2}, \quad f'' = -3x(1+x^2)^{-5/2}.$$

Donc $(1+x^2)f'' = -3x(1+x^2)^{-3/2} = -3xf'$, c'est-à-dire $(1+x^2)f'' + 3xf' = 0$. ✓

(b) On dérive la relation précédente : $2xf'' + (1+x^2)f^{(3)} + 3f' + 3xf'' = 0$, soit $(1+x^2)f^{(3)} + 5xf'' + 3f' = 0$. ✓ ■

Chapitre 11 — Applications de la dérivée

Théorème — Monotonie et signe de la dérivée

Soit f dérivable sur un **intervalle** I .

- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$;
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$;
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) = 0$;
- si $f' > 0$ sur I (sauf éventuellement en des points *isolés*), alors f est **strictement** croissante sur I .

Piège à éviter

Le mot **intervalle** est essentiel. Sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle), $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $f' < 0$ partout, et pourtant f n'est *pas* décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ alors que $-1 < 1$. Écrivez toujours «décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ ».

Attention aussi : $f' > 0$ n'est *pas* équivalent à « f strictement croissante». $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien que $f'(0) = 0$.

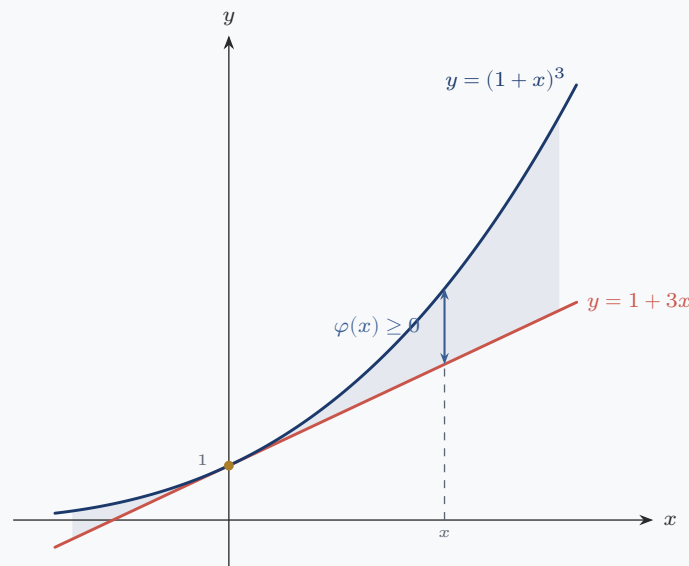
Méthode — Démontrer une inégalité par étude de fonction

Pour établir $A(x) \geq B(x)$ sur un intervalle I :

1. Poser $\varphi = A - B$ et déterminer φ' .
2. Étudier le **signe de** φ' (c'est là qu'est le travail ; au besoin, dériver une seconde fois).
3. Dresser le tableau de variations et **évaluer** φ **au bon bord** de l'intervalle.
4. Conclure : φ atteint son minimum en ce bord, et ce minimum est ≥ 0 .

Le point délicat : choisir la bonne variable. Dans une inégalité symétrique à plusieurs lettres, on *fixe toutes les variables sauf une* et l'on étudie la fonction de cette unique variable.

□ Démontrer une inégalité, c'est mesurer un écart vertical



Poser $\varphi = A - B$ revient à mesurer la flèche bleue. Ici $\varphi'(x) = 3(1+x)^2 - 3 \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$: φ croît depuis $\varphi(0) = 0$, l'écart ne peut donc que grandir. Géométriquement : **une courbe convexe reste au-dessus de sa tangente** — et l'inégalité de Bernoulli n'est rien d'autre que cela.

Exercice 9 — Inégalités classiques par dérivation

★★★☆☆ Classique

1. (Bernoulli) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1+x)^n \geq 1+nx$.
2. (Huygens) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 2\sin x + \tan x \geq 3x$.
3. Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \geq 6$.
4. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq 2\sqrt{2}$.

Correction

1. Posons $\varphi(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ sur $\mathbb{R}^+$. $\varphi'(x) = n[(1+x)^{n-1} - 1] \geq 0$ car $1+x \geq 1$ et $n-1 \geq 0$. Donc φ croît sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$. ✓

2. Posons $\varphi(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En notant $c = \cos x \in]0, 1]$:

$$\varphi'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2c^3 - 3c^2 + 1}{c^2} = \frac{(c-1)^2(2c+1)}{c^2} \geq 0.$$

(On a factorisé $2c^3 - 3c^2 + 1$ en remarquant que $c = 1$ en est racine double.) Donc φ croît et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$. ✓

3. On regroupe par paires : $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$. Or pour tout $t > 0, t + \frac{1}{t} \geq 2$ (car $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$). En sommant les trois minoration : la somme est ≥ 6 , avec égalité si et seulement si $a = b = c$. ✓

4. Par **homogénéité** : l'expression est invariante si l'on remplace (a, b) par $(\lambda a, \lambda b)$. On peut donc supposer $a = 1$ et poser $b = x > 0$. Il s'agit de montrer $\psi(x) = \sqrt{1+x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \geq 2\sqrt{2}$.

Un calcul donne $\psi'(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$, qui s'annule en $x = 1$, est négatif avant et positif

après. Donc ψ atteint son minimum en 1 : $\psi(1) = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$. ✓ ■

Astuce — L'homogénéité, l'arme secrète

Une inégalité *homogène* (invariante par $(a, b) \mapsto (\lambda a, \lambda b)$) se ramène toujours à **une seule variable** en normalisant, par exemple $a = 1$ ou $a + b = 1$. C'est le moyen le plus rapide de transformer un problème à plusieurs lettres en une étude de fonction ordinaire.

Exercice 10 — Inégalités à plusieurs variables

★★★★ Important

- Soient $x, y > 0$ fixés. On pose $f(z) = z^3 - 3xyz + x^3 + y^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - Étudier les variations de f .
 - Montrer que f admet un minimum dont on déterminera la valeur et le signe.
 - En déduire que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*, x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.
- Soient $a, b > 0$ tels que $a + b = 1$. On pose $\phi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{1-x}\right)$ sur $]0, 1[$. Étudier la monotonie de ϕ et en déduire $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$.
- Soient a, b, c les mesures des angles d'un triangle. Montrer que $\cos a \cos b \cos c \leq \frac{1}{8}$. (On pourra supposer $a \leq \frac{\pi}{3}$ et étudier $g(x) = -\cos a \cos x \cos(x + a)$.)

Correction

1.(a) $f'(z) = 3z^2 - 3xy = 3(z^2 - xy)$, qui s'annule en $z_0 = \sqrt{xy}$, est négatif sur $]0, z_0[$ et positif sur $]z_0, +\infty[$.

(b) Le minimum vaut

$$f(z_0) = (xy)^{3/2} - 3xy\sqrt{xy} + x^3 + y^3 = x^3 + y^3 - 2(xy)^{3/2} = \left(x^{3/2} - y^{3/2}\right)^2 \geq 0.$$

(c) Donc $f(z) \geq 0$ pour tout $z > 0$, ce qui s'écrit exactement $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$, avec égalité ssi $x = y$ et $z = \sqrt{xy}$, c'est-à-dire $x = y = z$. ✓

2. $\phi(x) = \frac{(x+1)(2-x)}{x(1-x)} = \frac{-x^2 + x + 2}{-x^2 + x} = 1 + \frac{2}{x-x^2}$. Le dénominateur $x - x^2$ est maximal en $x = \frac{1}{2}$, donc ϕ décroît sur $]0, \frac{1}{2}]$ et croît sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Son minimum est $\phi(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{2}{1/4} = 9$. Avec $a + b = 1$ (donc $b = 1 - a$), on obtient $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) = \phi(a) \geq 9$. ✓

3. Quitte à renommer, supposons a le plus petit angle : alors $a \leq \frac{\pi}{3}$. Comme $c = \pi - a - b$, on a $\cos c = -\cos(a + b)$, donc

$$\cos a \cos b \cos c = -\cos a \cos b \cos(a + b) = g(b), \quad g(x) = -\cos a \cos x \cos(x + a).$$

En utilisant $2 \cos x \cos(x + a) = \cos(2x + a) + \cos a$:

$$g(x) = -\frac{\cos a}{2} [\cos(2x + a) + \cos a].$$

Comme $\cos a > 0$ (car $a \leq \frac{\pi}{3}$), g est maximale quand $\cos(2x + a)$ est *minimal* sur le domaine admissible, ce qui conduit à $g(x) \leq \frac{\cos a(1 - \cos a)}{2}$. Or pour $t = \cos a \in]0, 1]$, $\frac{t(1-t)}{2} \leq \frac{1}{8}$ (maximum en $t = \frac{1}{2}$). D'où $\cos a \cos b \cos c \leq \frac{1}{8}$, avec égalité pour le triangle équilatéral $a = b = c = \frac{\pi}{3}$. ✓

2. Premières équations différentielles

Méthode — Résoudre $g'' + \omega^2 g = \varphi(x)$ au niveau Terminale

1. On dispose d'une **solution particulière** f (fournie par l'énoncé).
2. On pose $h = g - f$: alors $h'' + \omega^2 h = 0$.
3. On **admet** (ou l'on démontre) que les solutions de $h'' + \omega^2 h = 0$ sont $h(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
4. Conclusion : $g = f + h$, soit $g(x) = f(x) + A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.

Structure à retenir : *solution générale = solution particulière + solution générale de l'équation homogène*. C'est le schéma universel de toute la théorie des équations différentielles linéaires.

Exercice 11 — Trois équations différentielles

★★★★☆ Classique

1. Soit $f(x) = x + \sin(2x)$. Montrer que $f'' + 4f = 4x$, puis déterminer toutes les fonctions g deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $g'' + 4g = 4x$.
2. Soit $f(x) = x \sin(2x)$. Montrer que $f'' + 4f = 4 \cos(2x)$, puis déterminer toutes les fonctions g telles que $g'' + 4g = 4 \cos(2x)$.
3. Soit $f(x) = x + \sin x + \cos x$. Montrer que $f'' + f = x$, puis déterminer toutes les fonctions g telles que $g'' + g = x$.

Correction

1. $f' = 1 + 2 \cos 2x$, $f'' = -4 \sin 2x$, donc $f'' + 4f = -4 \sin 2x + 4x + 4 \sin 2x = 4x$ ✓. Pour g solution, $h = g - f$ vérifie $h'' + 4h = 0$, donc $h(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$ et

$$g(x) = x + \sin 2x + A \cos 2x + B \sin 2x = x + A \cos 2x + (B + 1) \sin 2x.$$

Autrement dit : $g(x) = x + \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. $f' = \sin 2x + 2x \cos 2x$, $f'' = 4 \cos 2x - 4x \sin 2x$, donc $f'' + 4f = 4 \cos 2x$ ✓. D'où $g(x) = x \sin 2x + \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$.

3. $f'' = -\sin x - \cos x$ donc $f'' + f = x$ ✓, et $g(x) = x + \lambda \cos x + \mu \sin x$. ■

Exercice 12 — Encadrement de $\sin$ et dérivabilité

★★★★☆ Classique

1. Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. Soit $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = \frac{1}{2}$. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
3. Soit $g(x) = \frac{\tan x}{x}$ si $x \neq 0$, et $g(0) = 1$. Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

Correction

1. **Majoration** : $u(x) = x - \sin x$ vérifie $u' = 1 - \cos x \geq 0$ et $u(0) = 0$, donc $u \geq 0$.

Minoration : $v(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ vérifie $v'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, puis $v''(x) = -\sin x + x = u(x) \geq 0$. Donc v' croît ; comme $v'(0) = 0$, on a $v' \geq 0$; donc v croît ; comme $v(0) = 0$, on a

$v \geq 0$. ✓

2. Il faut étudier $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$. Posons $w(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$. Alors $w'(x) = \sin x - x$ et, par la question 1, $-\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$ pour $x \geq 0$. En intégrant l'encadrement (ou par des études de signe successives) on obtient $-\frac{x^4}{24} \leq w(x) \leq 0$, donc

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq \frac{x^4/24}{|x|^3} = \frac{|x|}{24} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\tan x - x}{x^2}$. Posons $\theta(x) = \tan x - x$: $\theta(0) = 0$, $\theta' = \tan^2 x$, $\theta'' = 2 \tan x(1 + \tan^2 x)$, $\theta'(0) = \theta''(0) = 0$. On en déduit $|\theta(x)| \leq C|x|^3$ au voisinage de 0, donc $\frac{\theta(x)}{x^2} \rightarrow 0$: g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. ■

Astuce — Parité et estimations

$1 - \cos x$ est *paire* et vaut $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots$; $\tan x - x$ est *impaire* et vaut $\frac{x^3}{3} + \dots$. Connaître ces deux ordres de grandeur permet de deviner instantanément le résultat de la plupart des exercices de dérivabilité en 0 — puis de le démontrer proprement par encadrement.



QUATRIÈME PARTIE

Étude de fonctions

Branches infinies et asymptotes, concavité et points d'inflexion, éléments de symétrie, fonctions périodiques, et quatre problèmes de synthèse entièrement corrigés.

Chapitre 12 — Branches infinies

Méthode — L'algorithme complet des branches infinies en $+\infty$

On suppose $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ (sinon, si la limite est ℓ fini, on a une **asymptote horizontale** $y = \ell$).

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- Si la limite est $\pm\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy) .
- Si la limite est 0 : **branche parabolique de direction** (Ox) .
- Si la limite est $a \in \mathbb{R}^*$: on passe à l'étape 2.

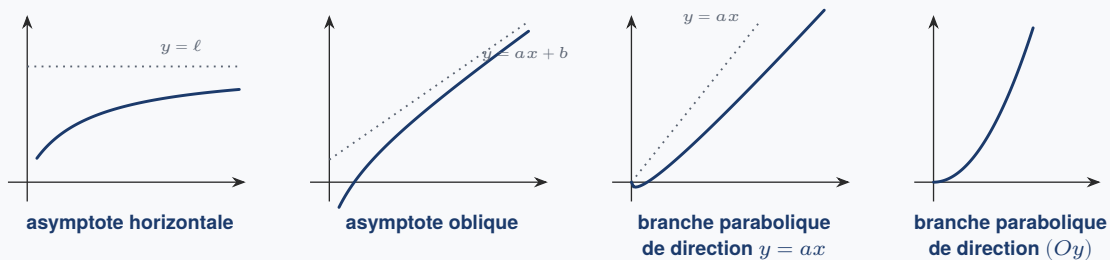
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

- Si la limite est $b \in \mathbb{R}$: **asymptote oblique** $y = ax + b$.
- Si la limite est $\pm\infty$: **branche parabolique de direction la droite** $y = ax$.

3. **Position relative** : étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$. Positif $\Rightarrow$ courbe au-dessus ; négatif $\Rightarrow$ en dessous.

Le même algorithme s'applique en $-\infty$ — *séparément*, car les résultats diffèrent souvent.

Les quatre types de branches infinies



Dans les deux premiers cas la courbe « colle » à une droite ; dans les deux derniers elle s'en écarte indéfiniment tout en gardant une direction limite.

Piège à éviter

Une **direction asymptotique** n'est pas une **asymptote**. Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$ mais $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$, la courbe n'admet *aucune* asymptote : elle possède seulement une branche parabolique. Écrire « asymptote $y = ax$ » dans ce cas est une faute lourde.

Astuce — Trouver une asymptote oblique sans limites

Pour une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ avec $\deg P = \deg Q + 1$, effectuez la **division euclidienne** : $\frac{P}{Q} = ax + b + \frac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$. L'asymptote est $y = ax + b$ et le **signe de $\frac{R}{Q}$ donne directement la position relative**. Deux résultats pour le prix d'un.

Exercice 1 — Branches infinies : dix cas

★★★★ Basique

Déterminer les branches infinies de $\mathcal{C}_f$ dans chacun des cas :

1. $f(x) = \frac{5 - 4x^2}{(2 + x)^2}$
2. $f(x) = \frac{4x^3 + 5}{2x^2 - x - 1}$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 3x}{x}$
4. $f(x) = 3x - \sqrt{x} + 2$
5. $f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$
6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3} - x$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} + x - 2$
8. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}$
9. $f(x) = x + \frac{|x - 1|}{x + 1}$
10. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

Correction — Réponses commentées

1. $f(x) \rightarrow -4$ en $\pm\infty$: asymptote horizontale $y = -4$. En $x = -2$: le numérateur vaut $-11 < 0$ et le dénominateur $\rightarrow 0^+$, donc $f \rightarrow -\infty$: asymptote verticale $x = -2$.

2. $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$. Division euclidienne : $f(x) = 2x + 1 + \frac{3x + 6}{2x^2 - x - 1}$. Asymptote oblique $y = 2x + 1$ en $\pm\infty$; asymptotes verticales $x = 1$ et $x = -\frac{1}{2}$.

3. $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ (privé de 0, non concerné). $f(x) = \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} + 3$. En $+\infty$: $\rightarrow 4$ (asymptote $y = 4$). En $-\infty$: $\rightarrow 2$ (asymptote $y = 2$). Deux asymptotes horizontales différentes : c'est la signature de $\sqrt{x^2} = |x|$.

4. $\frac{f(x)}{x} = 3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} \rightarrow 3$ mais $f(x) - 3x = 2 - \sqrt{x} \rightarrow -\infty$: **branche parabolique** de direction $y = 3x$.

5. $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$. En 1^+ : $f \rightarrow +\infty$, asymptote verticale $x = 1$. En $+\infty$: $f(x) - (3x - 2) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \rightarrow 0^+$: asymptote oblique $y = 3x - 2$, courbe *au-dessus*.

6. $\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$. En $+\infty$: $f(x) = \frac{4x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x} \rightarrow 2$, asymptote $y = 2$. En $-\infty$: $\frac{f(x)}{x} \rightarrow -2$ et $f(x) + 2x = \frac{4x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x} \rightarrow -2$: asymptote oblique $y = -2x - 2$.

7. $\mathcal{D}_f =]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$. En $+\infty$: $f(x) - (2x - 2) = \sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} \rightarrow 2$, donc asymptote oblique $y = 2x$. En $-\infty$: $\sqrt{x^2 + 4x} \sim -x - 2$ donc $f(x) \rightarrow -4$: asymptote horizontale $y = -4$.

8. $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$. En 2^+ : asymptote verticale $x = 2$. En $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x}{x-2}} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) = \frac{2x}{(x-2)(\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1)} \rightarrow 1$: asymptote oblique $y = x + 1$. En $-\infty$, $f \geq 0$ et $\frac{f}{x} \rightarrow -1$, $f(x) + x \rightarrow -1$: asymptote oblique $y = -x - 1$.

9. Pour $x > 1$: $f(x) = x + \frac{x-1}{x+1} = x + 1 - \frac{2}{x+1}$, asymptote oblique $y = x + 1$ en $+\infty$ (courbe en dessous). Pour $x < 1$: $f(x) = x + \frac{1-x}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$, asymptote oblique $y = x - 1$ en $-\infty$ (courbe en dessous). Asymptote verticale $x = -1$.

10. $\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$. Asymptotes verticales $x = \pm 3$. En $+\infty$: $f \rightarrow 2$; en $-\infty$: $f \rightarrow -2$. ■

Chapitre 13 — Concavité et points d'inflexion

Définition — Convexité, concavité

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I .

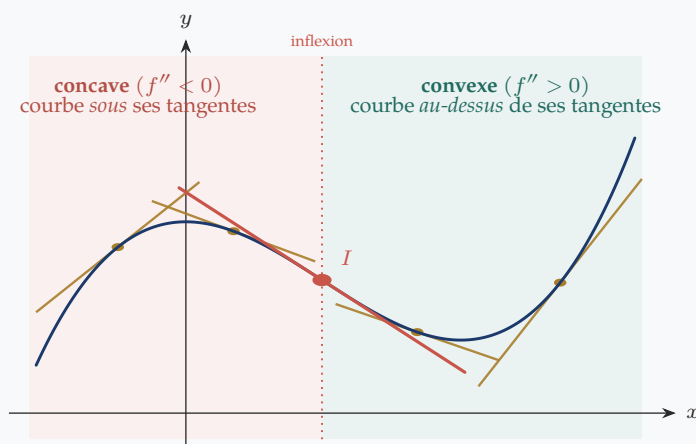
- Si $f'' \geq 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I (« tournée vers le haut », en forme de cuvette). Elle est alors *au-dessus* de chacune de ses tangentes.
- Si $f'' \leq 0$ sur I : $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I (« tournée vers le bas », en forme de dôme), et *en dessous* de ses tangentes.
- Un point $A(a, f(a))$ où f'' s'annule en changeant de signe est un **point d'inflexion** : la courbe y traverse sa tangente.

Piège à éviter

$f''(a) = 0$ **ne suffit pas** pour avoir un point d'inflexion : il faut un *changement de signe*. Contre-exemple : $f(x) = x^4$ vérifie $f''(0) = 0$, mais $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ partout : la courbe reste convexe, sans inflexion en 0.

Astuce — Mémoriser convexe / concave

☐ Convexe, concave, point d'inflexion : la courbe et ses tangentes



Au point d'inflexion I , et seulement là, la tangente **traverse** la courbe ; partout ailleurs elle reste du même côté. C'est le test visuel infallible — et il explique pourquoi f'' doit changer de signe, et pas seulement s'annuler.

« Convexe » contient un **v** : la courbe a la forme d'un **v**. Et $f'' \geq 0$ signifie que f' croît, donc la pente augmente : la courbe se redresse. Tout est cohérent.

Exercice 2 — Concavité et inflexions

★★☆☆ Basique

- Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 7x - 5$ sur $\mathbb{R}$. Calculer f'' , étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et déterminer ses points d'inflexion.
- Même travail pour :

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x$	(c) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}$
(b) $f(x) = 3x + 5 + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$	(d) $f(x) = x^3 - 1 - 2$

Correction

- $f' = x^2 - 2x + 7$, $f'' = 2x - 2 = 2(x - 1)$. $f'' < 0$ sur $] -\infty, 1[$ (concave), $f'' > 0$ sur $]1, +\infty[$ (convexe). Changement de signe en 1 : $I(1, f(1)) = I(1, \frac{7}{3})$ est un point d'inflexion.

2.(a) $f'' = 12x^2 + 6x - 36 = 6(2x^2 + x - 6) = 6(2x - 3)(x + 2)$. Convexe sur $] -\infty, -2]$ et $[\frac{3}{2}, +\infty[$, concave sur $[-2, \frac{3}{2}]$. Deux points d'inflexion, d'abscisses -2 et $\frac{3}{2}$.

(b) On pose $u = x + 1$, de sorte que $x^2 + 2x + 2 = u^2 + 1$ et $f = 3x + 5 + \frac{u}{u^2 + 1}$. Alors $\frac{d^2}{du^2} \left(\frac{u}{u^2 + 1} \right) = \frac{2u(u^2 - 3)}{(u^2 + 1)^3}$, qui s'annule en changeant de signe pour $u = 0$ et $u = \pm\sqrt{3}$. Trois points d'inflexion, d'abscisses $x = -1$ et $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

(c) $\mathcal{D}_f =] -\frac{1}{2}, +\infty[$. En écrivant $f = 3x(2x + 1)^{-1/2}$: $f''(x) = \frac{3(2x + 3)}{\dots}$ — plus simplement, $f' = \frac{3(x+1)}{(2x+1)^{3/2}}$ puis $f''(x) = \frac{-3(2x+5)}{\dots}$; le signe est celui de $-(2x+5)$, négatif sur tout $\mathcal{D}_f$ (car $x > -\frac{1}{2} > -\frac{5}{2}$). La courbe est donc **concave sur $\mathcal{D}_f$ tout entier** : aucun point d'inflexion.

(d) f n'est pas dérivable en 1. Sur $]1, +\infty[$: $f = x^3 - 3$ et $f'' = 6x > 0$ (convexe). Sur $] -\infty, 1[$: $f = 1 - x^3 - 2$ et $f'' = -6x$, positif pour $x < 0$ (convexe), négatif pour $0 < x < 1$ (concave). Point d'inflexion en $x = 0$; en $x = 1$ la courbe change aussi de concavité mais $f''(1)$ n'existe pas — on parle de point anguleux, pas d'inflexion. ■

Chapitre 14 — Symétries et périodicité

Propriété — Éléments de symétrie

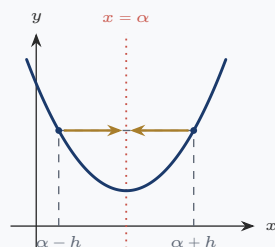
Soit f de domaine $\mathcal{D}_f$.

► Le point $\Omega(\alpha, \beta)$ est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si

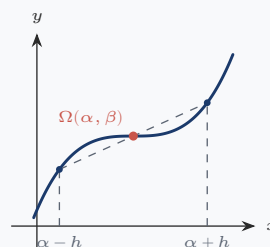
$$\forall h, (\alpha + h \in \mathcal{D}_f \Rightarrow \alpha - h \in \mathcal{D}_f) \quad \text{et} \quad f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta.$$

► La droite $(\Delta) : x = \alpha$ est **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $f(\alpha + h) = f(\alpha - h)$ pour tout h admissible.

Les deux symétries : miroir (axe) et demi-tour (centre)



Axe $x = \alpha$
 $f(\alpha - h) = f(\alpha + h)$



Centre Ω
 $f(\alpha - h) + f(\alpha + h) = 2\beta$

À gauche, la courbe se replie sur elle-même comme dans un miroir : les deux ordonnées sont égales. À droite, Ω est le milieu du segment joignant les deux points : leurs ordonnées ont pour moyenne β . Repérer une symétrie, c'est diviser par deux le travail d'étude.

Astuce — Deviner le centre de symétrie

Pour une fraction rationnelle, le centre de symétrie a pour abscisse le **pôle** (l'asymptote verticale) et pour ordonnée la valeur correspondante sur l'**asymptote**. Exemple : $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ a pour asymptote verticale $x = 1$ et pour asymptote oblique $y = 2x + 1$; le centre est donc $\Omega(1, 3)$... à vérifier par le calcul!

Pour un polynôme de degré 3, le centre de symétrie est **toujours** le point d'inflexion, d'abscisse

$$-\frac{b}{3a}.$$

Exercice 3 — Centres et axes de symétrie

★★★★ Basique

1. Montrer que Ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 4$ et $\Omega(1, -3)$;

(b) $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ et $\Omega(1, 3)$.

2. Montrer que (Δ) est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ et $(\Delta) : x = 3$;

(b) $f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ et $(\Delta) : x = \frac{1}{2}$.

Correction

1.(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, symétrique par rapport à 1. Calculons :

$$f(1+h) = (1+h)^3 - 3(1+h)^2 - 5(1+h) + 4 = h^3 - 6h - 3,$$

$$f(1-h) = -h^3 + 6h - 3.$$

Donc $f(1+h) + f(1-h) = -6 = 2 \times (-3)$. ✓ *Contrôle : l'abscisse du point d'inflexion est $-\frac{b}{3a} = \frac{3}{3} = 1$.* ✓

(b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, symétrique par rapport à 1. Écrivons $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$ (division euclidienne). Alors

$$f(1+h) = 2h + 3 + \frac{1}{h}, \quad f(1-h) = -2h + 3 - \frac{1}{h},$$

donc $f(1+h) + f(1-h) = 6 = 2 \times 3$. ✓

2.(a) $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$, donc $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 - 4}$: f ne dépend que de $(x-3)^2$, donc $f(3+h) = f(3-h) = \sqrt{h^2 - 4}$. ✓

(b) $f\left(\frac{1}{2}+h\right) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}+h} - \frac{1}{h-\frac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{1+2h} + \frac{2}{1-2h}$, expression *paire* en h . Donc $f\left(\frac{1}{2}+h\right) = f\left(\frac{1}{2}-h\right)$. ✓ ■

Méthode — Réduire le domaine d'étude

Avant toute étude, cherchez systématiquement :

1. une **périodicité** T : on étudie sur un intervalle de longueur T ;
2. une **parité** : paire $\Rightarrow$ on étudie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ puis symétrie d'axe (Oy) ; impaire $\Rightarrow$ symétrie de centre O .

Combiner les deux peut diviser le travail par 4 ou plus.

Exercice 4 — Étude d'une fonction périodique

★★★★ Classique

Soit $f(x) = \cos^2 x \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$, de courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est périodique de période π .

- Montrer que f est impaire et en déduire que l'on peut restreindre l'étude à $D_e = [0, \frac{\pi}{2}]$.
- Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur D_e .
- Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-2\pi, 3\pi]$.

Correction

- $\cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $\sin(2x + 2\pi) = \sin 2x$, donc $f(x + \pi) = f(x)$. ✓
- $f(-x) = \cos^2 x \sin(-2x) = -f(x)$: f est impaire. La périodicité π ramène l'étude à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et l'impairité à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- Linéarisons : $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} \sin 2x = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4}$. Donc

$$f'(x) = \cos 2x + \cos 4x = \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = (2\cos 2x - 1)(\cos 2x + 1).$$

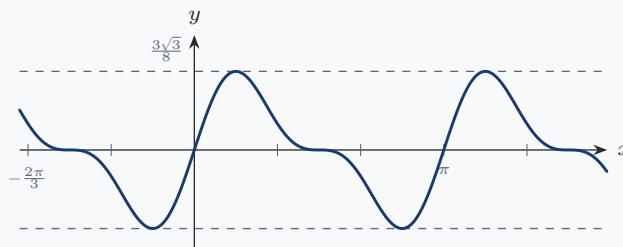
Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos 2x + 1 \geq 0$ (nul seulement en $\frac{\pi}{2}$), donc le signe de f' est celui de $2\cos 2x - 1$, positif pour $2x < \frac{\pi}{3}$, négatif ensuite.

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow 0$

Le maximum vaut $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,65$.

- On trace sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on complète par symétrie centrale en O sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, puis on translate de $k\pi$.

□ La courbe de $f(x) = \cos^2 x \sin(2x)$



Fonction impaire et π -périodique : le motif tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ engendre toute la courbe par symétrie puis translations.

Chapitre 15 — Trois problèmes de synthèse

À retenir — Le plan type d'une étude complète

- Domaine de définition $\mathcal{D}_f$ (et réduction par parité/périodicité).
- Limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$; continuité et prolongements éventuels.
- Dérivabilité aux points litigieux; interprétation géométrique (demi-tangentes).
- Branches infinies et positions relatives.
- Dérivée, signe, tableau de variations.
- Tangentes remarquables, points d'inflexion.
- Tracé, en plaçant d'abord les asymptotes et les tangentes.

Exercice 5 — Problème A — une racine de quotient

★★★☆☆ Classique

Soit $f(x) = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, de courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. Vérifier que $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et interpréter.
3. (a) Montrer que $(D) : y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
(b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et (D) .
4. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter géométriquement.
5. (a) Calculer $f'(x)$ sur $\mathcal{D}_f \setminus \{0\}$.
(b) Étudier son signe et dresser le tableau de variations.
6. Écrire l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Correction

1. Il faut $\frac{x}{x-1} \geq 0$ et $x \neq 1$. Le tableau de signes du quotient donne $x \leq 0$ ou $x > 1$. ✓
2. Quand $x \rightarrow 1^+ : \frac{x}{x-1} \rightarrow +\infty$ donc $\sqrt{\cdot} \rightarrow +\infty$ et $f(x) \rightarrow -\infty$. La droite $x = 1$ est **asymptote verticale**.

3.(a) $f(x) - (x - 2) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$. Or $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} \rightarrow 1$ en $\pm\infty$, donc l'expression tend vers $1 - 1 = 0$: $(D) : y = x - 2$ est asymptote oblique aux deux infinis. ✓

(b) Le signe de $1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ est l'opposé du signe de $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$.

➤ Si $x > 1 : \frac{1}{x-1} > 0$ donc $f(x) - (x - 2) < 0$: $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de (D) .

➤ Si $x < 0 : \frac{1}{x-1} < 0$ donc $f(x) - (x - 2) > 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) .

4. $f(0) = -1$. Pour $x < 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - \sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x} = 1 - \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Quand $x \rightarrow 0^-$, on pose $x = -t$ avec $t \rightarrow 0^+ : \frac{x}{x-1} = \frac{t}{t+1} \sim t$, donc $\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{x-1}} \sim \frac{\sqrt{t}}{-t} = -\frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow -\infty$. Ainsi $f'_g(0) = +\infty$: f n'est pas dérivable à gauche en 0 et $\mathcal{C}_f$ admet en $A(0, -1)$ une **demi-tangente verticale dirigée vers le bas** (côté gauche, limite $+\infty$: signes opposés).

5.(a) Posons $u(x) = \frac{x}{x-1}$, alors $u'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ et

$$f'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = 1 + \frac{1}{2(x-1)^2 \sqrt{\frac{x}{x-1}}}.$$

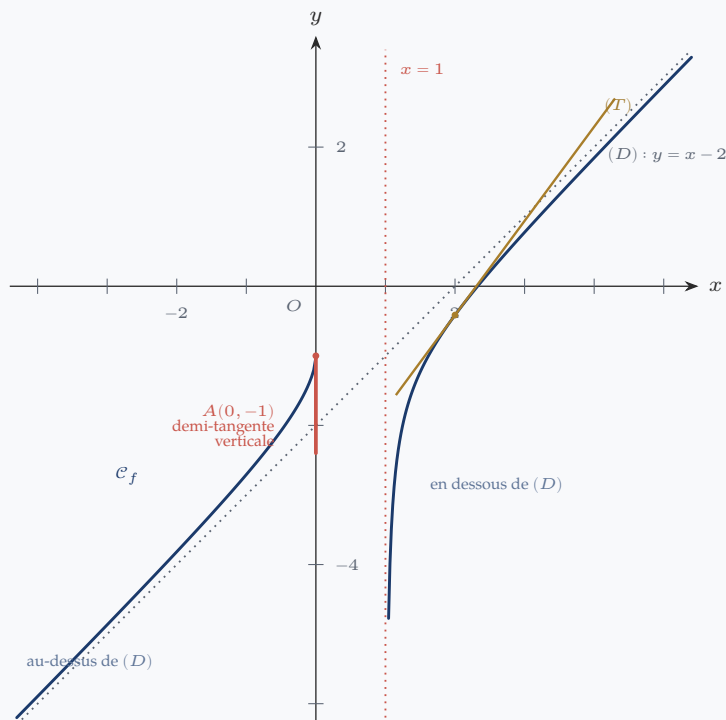
(b) Sur $\mathcal{D}_f \setminus \{0\}$, les deux termes sont strictement positifs : $f'(x) > 1 > 0$. Donc f est **strictement croissante** sur $] -\infty, 0]$ et sur $]1, +\infty[$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -1$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

6. $f(2) = 1 - \sqrt{2}$ et $f'(2) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$. D'où

$$(T) : y = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)(x - 2) + 1 - \sqrt{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)x - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}. \blacksquare$$

□ Problème A : $\mathcal{C}_f$, l'asymptote $(D) : y = x - 2$ et la tangente (T)



Le domaine $] -\infty, 0] \cup]1, +\infty[$ coupe la courbe en deux morceaux, tous deux strictement croissants. À gauche $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $(D) : y = x - 2$, à droite en dessous : c'est le signe de $1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ qui décide. En $A(0, -1)$ la demi-tangente est **verticale** car $f'_g(0) = +\infty$, et la droite $x = 1$ est asymptote verticale.

Exercice 6 — Problème B — recollement en 0

★★★★☆ Classique

Soit $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0, \\ x + \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$ de courbe $\mathcal{C}_f$.

- Montrer que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0 ; interpréter.
- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(b) Montrer que $(D) : y = 2x + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$ et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) sur $\mathbb{R}^+$.
(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$; interpréter.
- (a) Montrer que $f'(x) = -\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$ si $x < 0$ et $f'(x) = 1 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$ si $x > 0$.
(b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations.
- Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 .

Correction

1. Pour $x \leq 0$ le dénominateur $x^2 + 1$ ne s'annule pas. Pour $x > 0$, $x^2 + 2x = x(x + 2) > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. ✓ De plus $f(0) = 0$ des deux côtés : f est continue en 0.

2. À gauche : $\frac{f(x) - 0}{x} = \frac{-x^2}{x^2 + 1} \rightarrow 0$, donc $f'_g(0) = 0$: demi-tangente **horizontale** à gauche.

À droite : $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x(x+2)}}{x} = 1 + \sqrt{\frac{x+2}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, donc $f'_d(0) = +\infty$: demi-tangente **verticale vers le haut**. Le point O est un point anguleux (mixte).

3.(a) $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.

(b) $f(x) - (2x + 1) = \sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1) = \frac{(x^2 + 2x) - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1}$. Cette quantité tend vers 0^- : (D) est asymptote et $\mathcal{C}_f$ est **strictement en dessous** de (D) sur $\mathbb{R}_+^*$. ✓

(c) En $-\infty$: $-\frac{x^3}{x^2+1} \sim -x \rightarrow +\infty$. Et

$$f(x) + x = \frac{-x^3 + x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^-.$$

Donc $y = -x$ est **asymptote oblique** en $-\infty$, avec $\mathcal{C}_f$ en dessous.

4.(a) Pour $x < 0$: $f' = -\frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$. ✓ Pour $x > 0$: $f' = 1 +$

$$\frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = 1 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}. \quad \checkmark$$

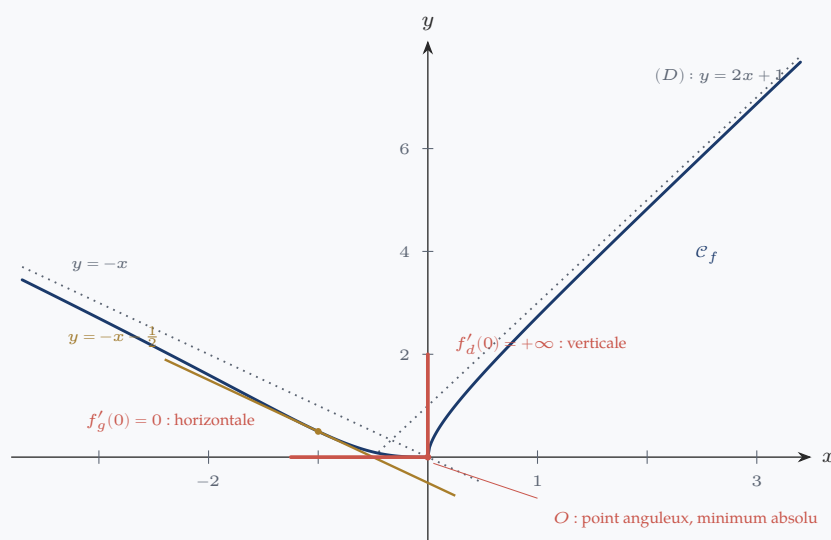
(b) Pour $x < 0$: $f' = -\frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} < 0$, f décroît. Pour $x > 0$: les deux termes sont > 0 , donc $f' > 0$ et f croît.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \parallel +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

f atteint son **minimum absolu** 0 en $x = 0$.

5. $f(-1) = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ et $f'(-1) = -\frac{1+3}{4} = -1$. D'où $(T) : y = -(x + 1) + \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$. ■

□ Problème B : le point anguleux « mixte » en O et les deux asymptotes



En O les deux demi-tangentes sont distinctes : horizontale à gauche, verticale à droite — c'est un point anguleux « mixte », et $f(0) = 0$ est le minimum absolu. La courbe reste strictement en dessous de ses deux asymptotes $y = -x$ (en $-\infty$) et $(D) : y = 2x + 1$ (en $+\infty$).

Exercice 7 — Problème C — point anguleux mixte

★★★★ Important

Soit $f(x) = \begin{cases} x + 2 - 2\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1, \\ \frac{1-x}{\sqrt{2x^2+2}} & \text{si } x < -1, \end{cases}$ de courbe $\mathcal{C}_f$.

- Déterminer $\mathcal{D}_f$.
- Montrer que f admet une limite en -1 ; f est-elle continue en -1 ?
- Étudier la dérivabilité de f en -1 et interpréter géométriquement.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.
- (a) Montrer que $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$ si $x > -1$ et $f'(x) = -\frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)^3}}$ si $x < -1$.
(b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations.

Correction

- Pour $x \geq -1$: $x+1 \geq 0$, tout est défini. Pour $x < -1$: $2x^2+2 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1 + 2 - 0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. Comme $f(-1) = 1$, f est **continue** en -1 .
- À droite : pour $x > -1$,

$$\frac{f(x) - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1) - 2\sqrt{x+1}}{x + 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow (-1)^+} -\infty.$$

Demi-tangente **verticale vers le bas** (côté droit, limite $-\infty$).

À gauche : $f'_g(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} -\frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)^3}} = \frac{0}{\sqrt{16}} = 0$: demi-tangente **horizontale**.

Les deux demi-tangentes étant distinctes, $A(-1, 1)$ est un **point anguleux**.

- En $+\infty$: $f(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1} \rightarrow +\infty$ (le terme x domine). En $-\infty$: $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1-x}{-x\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{-1}{-\sqrt{2}} \cdot (-1)$; plus simplement, en divisant par x :
 $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{-\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{-1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. En $-\infty$: **asymptote horizontale** $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\sqrt{x+1}}{x} \rightarrow 1$, mais $f(x) - x = 2 - 2\sqrt{x+1} \rightarrow -\infty$: **branche parabolique de direction la droite** $y = x$ (et non une asymptote).

- (a) Pour $x > -1$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{(x+1)-1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$. ✓

Pour $x < -1$, avec $f = \frac{1-x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$:

$$f' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{x^2+1} - (1-x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-(x^2+1) - x + x^2}{\sqrt{2}(x^2+1)^{3/2}} = \frac{-(x+1)}{\sqrt{2}(x^2+1)^{3/2}}.$$

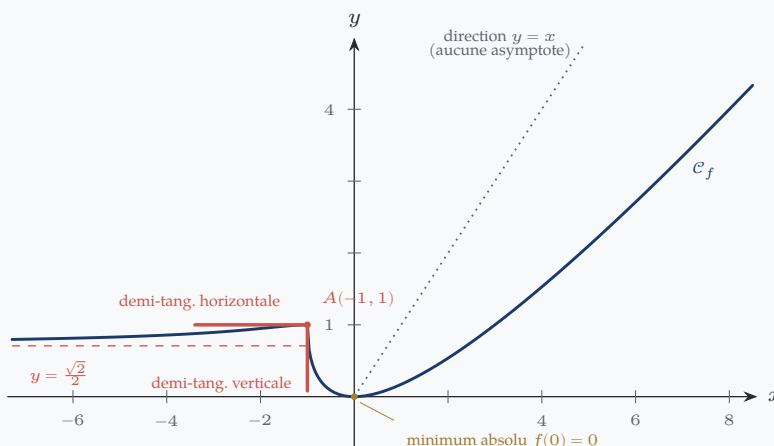
- (b) Pour $x < -1$: $-(x+1) > 0$ donc $f' > 0$, f croît. Pour $-1 < x < 0$: $f' < 0$ (signe de x), f

décroît. Pour $x > 0 : f' > 0$, f croît. Minimum en 0 : $f(0) = 2 - 2 = 0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f admet un maximum local 1 en -1 et un minimum absolu 0 en 0. ■

❏ Problème C : point anguleux en $A(-1, 1)$ et branche parabolique



Les deux demi-tangentes en A (horizontale à gauche, verticale à droite) font de A un **point anguleux**. En $+\infty$ la courbe s'écarte indéfiniment de la droite $y = x$ tout en gardant sa direction : c'est une **branche parabolique**, et surtout pas une asymptote. Sous la forme $f(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2$, la positivité et le minimum en 0 se lisent d'un coup d'œil.

Astuce — Reconnaître la forme canonique

Sur $[-1, +\infty[$, on peut écrire $f(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 1)^2$. Tout devient alors évident : $f \geq 0$, f s'annule exactement quand $\sqrt{x+1} = 1$, c'est-à-dire en $x = 0$, et le sens de variation se lit directement. **Cherchez toujours si une expression n'est pas un carré déguisé.**



CINQUIÈME PARTIE

Neuf exercices originaux

Composés spécialement pour réviser les quatre chapitres précédents et ouvrent, chacun, une porte vers un résultat classique des classes préparatoires.

Chapitre 16 — Pour aller plus loin

À retenir

Les exercices de cette partie ne sont pas des exercices d'entraînement de plus : chacun débouche sur un **résultat nommé** que vous retrouverez en Terminale ou en prépa (Vandermonde, Jordan, Hermite, série de Bâle...). Cherchez-les longuement. Un seul de ces exercices, réellement compris, vaut vingt exercices de routine.

Exercice 1 — La somme des carrés des coefficients binomiaux

★★★★☆ Original

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.
- En développant chaque membre, montrer que

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

- Vérifier ce résultat pour $n = 1, 2, 3$ sur le triangle de Pascal.
- Généralisation (Vandermonde).** Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ avec $r \leq p$ et $r \leq q$. Montrer par la même méthode que $\sum_{k=0}^r C_p^k C_q^{r-k} = C_{p+q}^r$.

Correction

- Évident : $a^n \cdot a^n = a^{2n}$ avec $a = 1+x$.
- Membre de droite* : le coefficient de x^n dans $(1+x)^{2n} = \sum_j C_{2n}^j x^j$ est C_{2n}^n .
Membre de gauche : en développant le produit,

$$\left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n C_n^j x^j \right) = \sum_m \left(\sum_{i+j=m} C_n^i C_n^j \right) x^m.$$

Le coefficient de x^n est donc $\sum_{i=0}^n C_n^i C_n^{n-i}$, qui vaut $\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2$ par la relation de symétrie. Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients : on conclut. ✓

3. $n = 1 : 1^2 + 1^2 = 2 = C_2^1$. ✓ $n = 2 : 1 + 4 + 1 = 6 = C_4^2$. ✓ $n = 3 : 1 + 9 + 9 + 1 = 20 = C_6^3$. ✓

4. On identifie le coefficient de x^r dans $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$: à gauche $\sum_{k=0}^r C_p^k C_q^{r-k}$, à droite C_{p+q}^r . ■

Astuce — La méthode des « fonctions génératrices »

Identifier les coefficients de deux écritures d'un même polynôme est une technique d'une puissance considérable : elle démontre en trois lignes des identités qu'un calcul direct rendrait inextricables. Retenez le schéma : « une identité algébrique $\Rightarrow$ une identité combinatoire ».

Exercice 2 — Télescopage avec des radicaux

★★★★☆ Original

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
2. En déduire une expression simple de S_n .
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.
4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$, puis en déduire un encadrement de $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Correction

1. Quantité conjuguée : $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. ✓

2. Somme télescopique : $S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$.

3. $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

4. $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$. Or $2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1} < 2\sqrt{k+1}$, d'où par passage à l'inverse (décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$) : $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$. ✓

En sommant l'inégalité de droite pour $k = 1, \dots, n$: $\sqrt{n+1} - 1 < \frac{1}{2}T_n$, donc $T_n > 2\sqrt{n+1} - 2$.

En sommant celle de gauche pour $k = 1, \dots, n-1$: $\frac{1}{2}(T_n - 1) < \sqrt{n} - 1$, donc $T_n < 2\sqrt{n} - 1$.

Finalement

$$2\sqrt{n+1} - 2 < T_n < 2\sqrt{n} - 1, \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{\sqrt{n}} = 2. \blacksquare$$

Remarque

Vous venez de démontrer, à la main, un cas particulier de *comparaison série-intégrale* : $\sum_{k \leq n} k^{-1/2} \sim 2\sqrt{n}$. C'est un résultat que vous reverrez en Sup, démontré avec des intégrales — mais l'encadrement élémentaire ci-dessus est tout aussi rigoureux.

Exercice 3 — Déterminer une asymptote oblique

★★★★ Original

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.
2. Faire de même en $-\infty$. Les valeurs trouvées sont-elles les mêmes ?
3. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à chacune de ses deux asymptotes.
4. Montrer que la droite $x = -\frac{1}{2}$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Ce résultat était-il prévisible ?

Correction

1. $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1$, donc $a = 1$. Puis

$$f(x) - x = \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Donc $b = \frac{1}{2}$: asymptote $y = x + \frac{1}{2}$ en $+\infty$.

2. En $-\infty$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x} \sqrt{1 + \dots} \rightarrow -1$, donc $a = -1$. Puis

$$f(x) + x = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{-x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Donc l'asymptote en $-\infty$ est $y = -x - \frac{1}{2}$: les valeurs sont différentes.

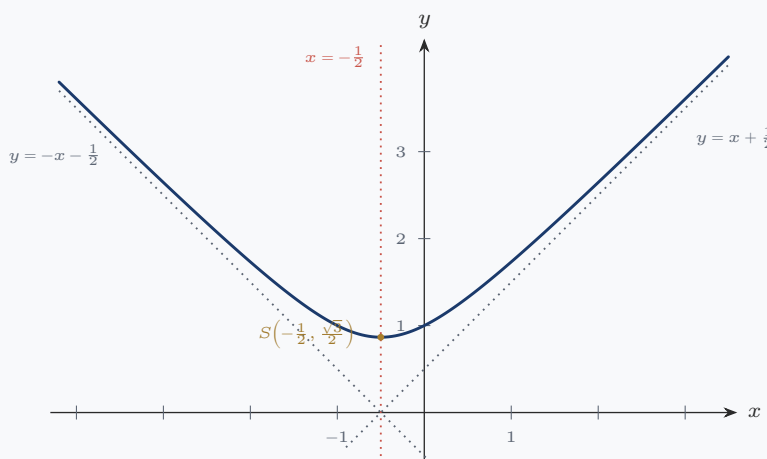
3. $f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2}$ (signe). Plus directement :

$$(x^2 + x + 1) - (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} > 0,$$

donc $f(x) > |x + \frac{1}{2}|$ pour tout x : $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de ses deux asymptotes, partout.

4. $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, donc $f(-\frac{1}{2} + h) = \sqrt{h^2 + \frac{3}{4}} = f(-\frac{1}{2} - h)$. ✓ C'était prévisible : la forme canonique montre que f ne dépend que de $(x + \frac{1}{2})^2$. Les deux asymptotes sont d'ailleurs symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite. ■

□ Deux asymptotes obliques symétriques : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$



La forme canonique $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ explique tout : la courbe ne dépend que de $(x + \frac{1}{2})^2$, d'où l'axe de symétrie $x = -\frac{1}{2}$, le minimum $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $-\frac{1}{2}$, et deux asymptotes obliques échangées par cette symétrie. Comme $f(x)^2 - (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} > 0$, la courbe est partout **au-dessus** de ses deux asymptotes.

Exercice 4 — Une limite trigonométrique à radicaux

★★★★☆ Original

1. Calculer $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$. (Indication : multiplier par la quantité conjuguée.)
2. Calculer $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Généraliser : calculer $L(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos(ax)}}{x^2}$, puis vérifier la cohérence du résultat avec la question 1.

Correction

1. Notons $A = \cos x \sqrt{\cos 2x}$, positif au voisinage de 0. Alors

$$\frac{1 - A}{x^2} = \frac{1 - A^2}{x^2(1 + A)} = \frac{1 - \cos^2 x \cos 2x}{x^2(1 + A)}.$$

Or, avec $c = \cos 2x$ et $\cos^2 x = \frac{1+c}{2}$:

$$1 - \cos^2 x \cos 2x = 1 - \frac{(1+c)c}{2} = \frac{2-c-c^2}{2} = \frac{(1-c)(2+c)}{2}.$$

Donc

$$\frac{1 - A}{x^2} = \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \cdot \frac{2 + \cos 2x}{2(1 + A)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{2}, \quad \text{soit } L_1 = \frac{3}{2}.$$

2. Même stratégie :

$$\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})} = \frac{(1 - \cos 2x) - (1 - \cos x)}{x^2(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 2x})}.$$

Le numérateur divisé par x^2 tend vers $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, le dénominateur vers 2 : $L_2 = \frac{3}{4}$.

3. Posons $A = \cos x \sqrt{\cos(ax)} \rightarrow 1$. On a $\frac{1 - A}{x^2} = \frac{1 - A^2}{x^2(1 + A)}$ avec

$$1 - A^2 = 1 - \cos^2 x \cos(ax) = \underbrace{(1 - \cos^2 x)}_{=\sin^2 x} + \cos^2 x (1 - \cos(ax)).$$

En divisant par x^2 : $\frac{\sin^2 x}{x^2} \rightarrow 1$ et $\cos^2 x \cdot \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} \rightarrow \frac{a^2}{2}$. Comme $1 + A \rightarrow 2$:

$$L(a) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{2 + a^2}{4}$$

Contrôle : pour $a = 2$, $L(2) = \frac{2+4}{4} = \frac{3}{2} = L_1$. ✓ ■

Astuce — Découper avant de conjuguer

La clé de la question 3 est la décomposition $1 - uv = (1 - u) + u(1 - v)$, appliquée à $u = \cos^2 x$ et $v = \cos(ax)$: elle **sépare les deux sources d'indétermination**, chacune se ramenant ensuite à la limite de référence $\frac{1 - \cos t}{t^2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Règle générale : quand un produit résiste, transformez-le en somme ; quand une somme résiste, factorisez-la.

On considère $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que $\varphi'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

2. Soit $\psi(x) = x \cos x - \sin x$. Calculer ψ' et en déduire le signe de ψ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

3. En déduire les variations de φ , puis établir l'**inégalité de Jordan** :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x.$$

4. **Application.** En déduire un encadrement de $\sin \frac{\pi}{5}$ et le comparer à la valeur exacte $\approx 0,5878$.

Correction

1. Quotient : $\varphi' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. ✓

2. $\psi'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$. Sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $x > 0$ et $\sin x > 0$, donc $\psi' < 0$: ψ est strictement décroissante. Comme $\psi(0) = 0$, on a $\psi(x) < 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Donc $\varphi' < 0$: φ est **strictement décroissante** sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Or

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

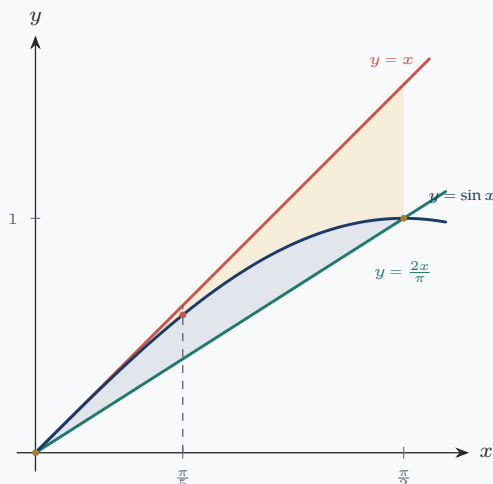
La décroissance donne $\frac{2}{\pi} \leq \varphi(x) \leq 1$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, c'est-à-dire $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$. L'inégalité est encore vraie en 0 (les trois membres sont nuls). ✓

4. Pour $x = \frac{\pi}{5}$: $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 \leq \sin \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{5} \approx 0,6283$. La valeur exacte 0,5878 est bien dans l'encadrement. ■

Astuce — Interprétation géométrique

$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ est la *pente* de la corde joignant l'origine au point $(x, \sin x)$ de la sinusoïde. Dire que φ décroît, c'est dire que la courbe du sinus est **concave** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: elle est au-dessus de sa corde ($y = \frac{2x}{\pi}$) et en dessous de sa tangente en 0 ($y = x$). Une *inégalité analytique cache toujours une image géométrique* : cherchez-la, elle vous fera retenir le résultat.

□ L'inégalité de Jordan lue sur la sinusoïde



Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ la sinusoïde est **concave** : elle reste sous sa tangente en O (la droite $y = x$, zone dorée) et au-dessus de sa corde $y = \frac{2x}{\pi}$ (zone bleue). Ces deux encadrements réunis sont exactement l'inégalité de Jordan $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$. Les trois courbes se recoupent en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ — l'encadrement y est une égalité.

Exercice 6 — Dérivées n -ièmes des fonctions circulaires

★★★★☆ Original

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
2. En déduire, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$
3. Énoncer et démontrer la formule analogue pour $\cos^{(n)}$.
4. **Application.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et $f(x) = \sin(ax + b)$. Déterminer $f^{(n)}(x)$.
5. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - ax}{x^3}$ à l'aide de $\sin^{(3)}$. (On admettra que $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \rightarrow 0$.)

Correction

1. Formule d'addition : $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$. ✓
 2. Initialisation $n = 0$: $\sin^{(0)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 0\right)$. ✓
Hérédité : si $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, alors en dérivant

$$\sin^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \stackrel{(1.)}{=} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$
 3. De même $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$; la démonstration est identique, en utilisant $-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
 4. Chaque dérivation fait sortir un facteur a : $f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$ (récurrence immédiate).
 5. En posant $t = ax$: $\frac{\sin(ax) - ax}{x^3} = a^3 \cdot \frac{\sin t - t}{t^3} = a^3 \left(-\frac{1}{6} + \varepsilon(t)\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{a^3}{6}$.
- Lecture : le coefficient $-\frac{1}{6} = \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!}$ est exactement le troisième coefficient de Taylor de $\sin$ — vous formaliserez cela en Terminale et en prépa. ■

Exercice 7 — Étude complète d'une fonction « hyperbolique »

★★★★☆ Original

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, de courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

- Déterminer $\mathcal{D}_f$ et montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x)(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$. En déduire le signe de f .
- Étudier la dérivabilité de f en 1 et en -1 ; interpréter géométriquement.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$ et les positions relatives.
- Calculer $f'(x)$ sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, étudier son signe et dresser le tableau de variations.
- Montrer que $\forall x \geq 1, f(x) \geq x + \sqrt{x - 1}$.

Correction

1. $x^2 - 1 \geq 0 \iff |x| \geq 1$, donc $\mathcal{D}_f =] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. De plus

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = x^2 - (x^2 - 1) = 1.$$

Ce produit valant 1, les deux facteurs sont non nuls et de même signe. Pour $x \geq 1 : f(x) \geq 1 > 0$. Pour $x \leq -1 : x - \sqrt{x^2 - 1} \leq -1 < 0$, donc $f(x) < 0$ et, plus précisément, $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \in [-1, 0[$.

2. En 1 ($f(1) = 1$) : pour $x > 1$,

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} = 1 + \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty.$$

Demi-tangente **verticale vers le haut** au point $A(1, 1)$.

En -1 ($f(-1) = -1$) : pour $x < -1$, en posant $x + 1 = -h$ avec $h > 0$:

$$\frac{f(x) + 1}{x + 1} = 1 + \frac{\sqrt{h(h+2)}}{-h} = 1 - \sqrt{\frac{h+2}{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} -\infty.$$

Demi-tangente **verticale vers le haut** au point $B(-1, -1)$ (côté gauche, limite $-\infty$: signes identiques).

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. En $-\infty$, on utilise la question 1 : $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ et $x - \sqrt{x^2 - 1} \sim 2x \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$.

4. En $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \rightarrow 2$ et

$$f(x) - 2x = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \rightarrow 0^-.$$

Asymptote oblique $y = 2x$, avec $\mathcal{C}_f$ **en dessous**.

En $-\infty$: asymptote horizontale $y = 0$ (l'axe (Ox)), avec $\mathcal{C}_f$ **en dessous** puisque $f < 0$.

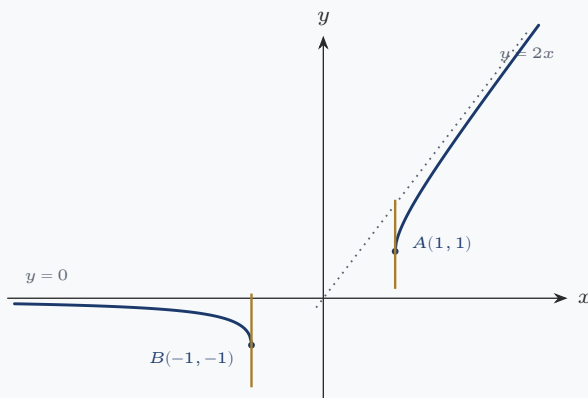
5. Sur $|x| > 1 : f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Le signe de f' est donc celui de f : positif sur $]1, +\infty[$, négatif sur $] -\infty, -1[$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	
$f(x)$	0^-	-1	1	$+\infty$

6. L'inégalité équivaut à $\sqrt{x^2 - 1} \geq \sqrt{x - 1}$. Les deux membres étant positifs sur $[1, +\infty[$, on peut élever au carré : elle équivaut à $x^2 - 1 \geq x - 1$, c'est-à-dire $x^2 \geq x$, soit $x(x - 1) \geq 0$ — vrai pour tout $x \geq 1$. ✓

Remarque : l'énoncé serait dépourvu de sens sur $[0, 1[$, où $\sqrt{x^2 - 1}$ n'existe pas. Vérifiez toujours le domaine avant de manipuler une inégalité. ■

□ Allure de $\mathcal{C}_f$ pour $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$



Deux demi-tangentes verticales en A et B, une asymptote oblique $y = 2x$ en $+\infty$ et l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.

Exercice 8 — Vers le problème de Bâle

★★★★ Original

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n < 2 - \frac{1}{n}$.
3. Montrer que la suite (U_n) est croissante et majorée. Que peut-on en conclure ?
4. Montrer que $\forall k \geq 1, \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et en déduire une minoration de U_n . Cette minoration est-elle satisfaisante ? L'améliorer en isolant les deux premiers termes.

Correction

1. $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$. Comme $k(k-1) < k^2$ pour $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k(k-1)} > \frac{1}{k^2}$. ✓

2. En sommant pour $k = 2, \dots, n$ (télescopage) :

$$U_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n}.$$

3. $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite est strictement croissante. Elle est majorée par 2 d'après 2. **Toute suite croissante et majorée converge** : (U_n) admet donc une limite finie $\ell \leq 2$.

4. Comme $k(k+1) > k^2$, on a $\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. En sommant :

$$U_n > \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Cette minoration est *insuffisante* : elle donne seulement $\ell \geq 1$, alors que $U_2 = \frac{5}{4}$ déjà dépasse 1. On l'améliore en gardant les deux premiers termes exacts et en ne minorant que la queue de la somme :

$$U_n = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2} > \frac{5}{4} + \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} = \frac{19}{12} - \frac{1}{n+1}.$$

On obtient ainsi $\frac{19}{12} \leq \ell \leq 2$, soit $1,583 \leq \ell \leq 2$. ■

Remarque — Le problème de Bâle

La limite ℓ vaut exactement $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$. Ce résultat, posé en 1650 et resté ouvert pendant 90 ans, fut établi par EULER en 1735 : c'est le *problème de Bâle*. Vos encadrements donnent $1,583 \leq \ell \leq 2$: pas si mal, avec les seuls outils d'un élève de première année !

Exercice 9 — L'identité d'Hermite

★★★★ Original

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} E\left(x + \frac{j}{n}\right) - E(nx).$$

1. Rappeler l'encadrement caractérisant $E(t)$ et vérifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $g\left(x + \frac{1}{n}\right) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on utilisera $E(t+1) = E(t) + 1$).
3. Calculer $g(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$.
4. En déduire l'**identité d'Hermite** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) + E\left(x + \frac{1}{n}\right) + \dots + E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = E(nx).$$

5. **Application.** Calculer $E\left(\frac{2025}{4}\right) + E\left(\frac{2026}{4}\right) + E\left(\frac{2027}{4}\right) + E\left(\frac{2028}{4}\right)$.

Correction

1. $E(t)$ est l'unique entier tel que $E(t) \leq t < E(t) + 1$. Chaque terme de g est bien défini pour tout réel, donc $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.
2. Remplaçons x par $x + \frac{1}{n}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} E\left(x + \frac{j+1}{n}\right) = \sum_{i=1}^n E\left(x + \frac{i}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} E\left(x + \frac{j}{n}\right) - E(x) + E(x+1).$$

Comme $E(x+1) = E(x) + 1$, la somme augmente exactement de 1. Par ailleurs $E(n(x + \frac{1}{n})) = E(nx + 1) = E(nx) + 1$: le terme soustrait augmente lui aussi de 1. Donc $g(x + \frac{1}{n}) = g(x)$. ✓
La fonction g est $\frac{1}{n}$ -périodique.

3. Soit $x \in [0, \frac{1}{n}]$. Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$0 \leq x + \frac{j}{n} < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1,$$

donc $E(x + \frac{j}{n}) = 0$. De plus $0 \leq nx < 1$ donc $E(nx) = 0$. Ainsi $g(x) = 0$ sur $[0, \frac{1}{n}]$.

4. g est $\frac{1}{n}$ -périodique et nulle sur une période complète $[0, \frac{1}{n}]$: elle est donc **identiquement nulle** sur $\mathbb{R}$. C'est exactement l'identité d'Hermite. ✓

5. Avec $n = 4$ et $x = \frac{2025}{4}$, les quatre termes sont $E(x + \frac{j}{4})$ pour $j = 0, 1, 2, 3$, et l'identité donne

$$\text{Somme} = E(4x) = E(2025) = 2025. \blacksquare$$

Astuce — La stratégie « périodicité + un intervalle »

Pour démontrer qu'une fonction bizarre est nulle partout, il suffit souvent de montrer (i) qu'elle est périodique et (ii) qu'elle est nulle sur *une* période. Cette technique en deux temps évite tout calcul général et vaut aussi pour les suites (raisonnement modulo n). Elle est très fréquente en concours.



ANNEXES

Formulaire et plan de révision

Tout ce qu'il faut savoir par cœur en trois pages, et un programme de travail pour les quatre semaines qui précèdent la rentrée.

Annexe A — Le formulaire minimal

1. Algèbre

Boîte à outils

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, \quad kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}, \quad a^n + b^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k \quad (n \text{ impair})$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1), \quad \sum_{k=p}^q (v_{k+1} - v_k) = v_{q+1} - v_p \quad (\text{télescopage})$$

2. Limites de référence

Boîte à outils

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{p}{q}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \frac{u-v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}, \quad \sqrt{x^2} = |x|, \quad x-1 < E(x) \leq x$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

3. Dérivation

Boîte à outils

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{1}{v} \right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad (u^n)' = n u' u^{n-1}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (\sin u)' = u' \cos u, \quad (\cos u)' = -u' \sin u, \quad (\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u)$$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a), \quad f \text{ dérivable en } a \iff f'_a(a) = f'_g(a) \in \mathbb{R}$$

4. Inégalités à connaître



Boîte à outils

$$\forall t > 0, t + \frac{1}{t} \geq 2; \quad \forall x \geq 0, \forall n \geq 1, (1+x)^n \geq 1+nx \text{ (Bernoulli)}$$

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x; \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \text{ (Jordan)}$$

$$\forall a, b, c > 0, \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \text{ (moyennes);} \quad a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Annexe B — Quatre semaines pour être prêt

À retenir

Ce plan suppose environ **1 h 30 par jour**, six jours sur sept. Il est conçu pour la période précédant la rentrée. L'ordre n'est pas négociable : chaque semaine s'appuie sur la précédente.

Semaine	Contenu	Exercices	Objectif de maîtrise
S1 Calcul algébrique	Chapitres 1 et 2. Binôme, Pascal, sommes classiques, télescopage, $a^n - b^n$.	Tous les exercices des chap. 1-2, puis les originaux n°s 1 et 2.	Développer $(a + b)^7$ de tête; démontrer S_2 par télescopage sans notes.
S2 Limites	Chapitres 3 à 5. Formes indéterminées, conjuguée, limites trigonométriques.	Chap. 3 et 4 en entier; chap. 5 en priorité les items 1-8.	Identifier en 10 secondes l'outil adapté à une limite donnée.
S3 Ordre & dérivation	Chapitres 6 à 10. Gendarmes, partie entière, nombre dérivé, formulaire, dérivées n -ièmes.	Chap. 6 en entier (la partie entière est le point faible classique); chap. 8-10.	Reconnaître un taux d'accroissement; écrire une récurrence sans faute.
S4 Synthèse	Chapitres 11 à 15. Inégalités, branches infinies, concavité, symétries, problèmes complets.	Les trois problèmes de synthèse <i>en temps limité</i> (1 h 30 chacun), puis les originaux 5 à 9.	Mener une étude complète de bout en bout, tracé compris.

Méthode — Comment travailler un exercice — le protocole en 4 temps

- 1. Chercher seul, 20 minutes minimum**, sans consulter le corrigé. Écrire tout ce que l'on tente, même les impasses.
- 2. Lire le corrigé**, mais uniquement jusqu'au point où l'on était bloqué — puis refermer et repartir seul.
- 3. Rédiger la solution complète** sur une feuille propre, comme en devoir.
- 4. Refaire l'exercice 48 heures plus tard**, sans rien. C'est cette quatrième étape que tout le monde saute, et c'est la seule qui fasse réellement mémoriser.

Astuce — Le carnet d'erreurs

Tenez un carnet où vous notez, en une ligne, *chaque* erreur commise : « oublié $|x|$ dans $\sqrt{x^2}$ », « inversé le signe en multipliant par un négatif », « initialisé la récurrence au mauvais rang ». Relisez-le avant chaque devoir. Au bout d'un mois, vous constaterez que vous commettez toujours les *mêmes* trois ou quatre erreurs — et que les avoir nommées suffit à les faire disparaître.

À retenir — Le mot de la fin

La Terminale Sciences Mathématiques ne demande pas plus de talent que la première année : elle demande davantage de **rigueur** et davantage de **régularité**. Les élèves qui réussissent ne sont pas ceux qui comprennent le plus vite, mais ceux qui vérifient systématiquement, qui reviennent sur leurs erreurs et qui travaillent un peu, tous les jours.

« Il faut faire aujourd'hui ce que tout le monde fera demain. »
— Jean Cocteau