



Cours

Les symboles Σ et Π

*Notation, règles de calcul, changement d'indice, télescopage,
sommes usuelles, sommes géométriques, produits et factorielles.
Première année Bac — Sciences Mathématiques | vers la CPGE*

Prof : R. Abed

Plan du chapitre

Cours — Les symboles Σ et Π	1	Démontrer une formule de somme par récurrence	12
Introduction, motivation et objectifs	3	Le symbole Π : produits	12
Place dans le programme et objectifs pédagogiques	3	Définition et factorielle	12
Le symbole Σ : notation et premiers calculs	3	Règles de calcul	13
Définition	3	Produits télescopiques	14
Écrire une somme avec le symbole Σ .	5	Fiche de révision — l’essentiel en un coup d’œil	15
Règles de calcul sur les sommes	5	QCM d’auto-évaluation — 21 questions . .	16
Linéarité	5	Niveau ★☆☆☆ / ★★☆☆ — Moyen (question 1 à 7)	16
Relation de Chasles (découpage) . . .	6	Niveau ★★☆☆ / ★★★☆ — Bon (question 8 à 14)	16
Changement d’indice	6	Niveau ★★★★★ — Difficile (questions 15 à 21)	17
Séparer les termes d’indices pairs et impairs	7	Exercices d’application	19
Sommes télescopiques	7	Problèmes de synthèse	22
Le principe	7	Compléments : histoire, applications, ouverture	24
Exemples fondamentaux	8	Un peu d’histoire	24
Une application : majorer une somme	9	Applications concrètes	24
Les sommes usuelles	9	Carte mentale du chapitre	24
Sommes des puissances des entiers . .	9	Glossaire des notations	24
Somme des termes d’une suite arithmétique	10	Auto-évaluation	25
Somme géométrique	10	Pour aller plus loin (perspective CPGE)	25
Factorisation de $a^n - b^n$	11		

Introduction, motivation et objectifs

Vers 1786, dans une école de Brunswick, un instituteur demande à ses élèves de calculer $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ pour les occuper un long moment. Quelques secondes plus tard, le jeune Carl Friedrich GAUSS (9 ans) pose son ardoise : **5050**. Il a remarqué qu'en associant le premier et le dernier terme, le deuxième et l'avant-dernier, etc., on obtient 50 paires valant chacune 101. Ce chapitre donne le langage — les symboles Σ et Π — et les techniques qui transforment ce genre d'astuce en méthodes systématiques.

Remarque — Le mot du chapitre

Écrire une somme avec Σ , ce n'est pas seulement abrégé : c'est *rendre visible sa structure* (le terme général, le nombre de termes), et donc la manipuler comme un objet algébrique.

1. Place dans le programme et objectifs pédagogiques

Les symboles Σ et Π interviennent tout au long de l'année de Première SM : raisonnement par récurrence, suites arithmétiques et géométriques, arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (factorisation de $a^n - b^n$, divisibilité), polynômes, trigonométrie (sommes et produits de cosinus). En classes préparatoires, ils deviennent le langage quotidien de l'algèbre et de l'analyse.

À retenir — À la fin de ce chapitre, l'élève saura...

- lire et écrire une somme ou un produit avec Σ et Π , et compter le **nombre de termes** ;
- utiliser la **linéarité**, la **relation de Chasles** et le **changement d'indice** ;
- reconnaître et calculer une somme ou un produit **télescopique** ;
- connaître et **démontrer** les sommes usuelles $\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$ et la **somme géométrique** ;
- factoriser $a^n - b^n$ et l'utiliser en arithmétique ;
- manipuler la **factorielle** et les produits usuels $(\prod 2k, \prod q^k, \dots)$;
- démontrer une formule de somme ou de produit **par récurrence**.

Rappel de cours

On suppose connus : le calcul dans $\mathbb{R}$ (fractions, puissances entières $a^p a^q = a^{p+q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$), les **identités remarquables**, la **quantité conjuguée** $((\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b)$, le **raisonnement par récurrence** et la notation $\llbracket m, n \rrbracket = \{m, m+1, \dots, n\}$ pour $m \leq n$ entiers.

Le symbole Σ : notation et premiers calculs

2. Définition

Définition — Le symbole Σ

Soient $m \leq n$ deux entiers et $u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$ des réels. On note

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m + u_{m+1} + \dots + u_n,$$

qui se lit « somme pour k allant de m à n des u_k ». Cas fréquents :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

On écrit aussi $\sum_{k \in [m, n]} u_k$ ou $\sum_{m \leq k \leq n} u_k$.

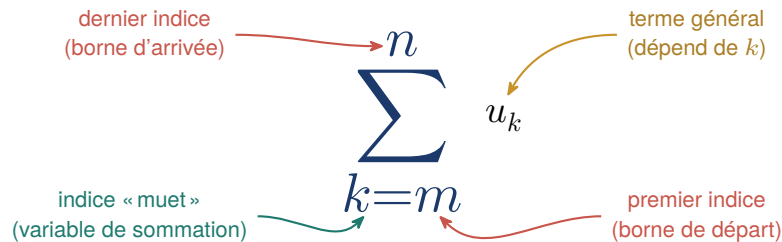


FIG. — Anatomie du symbole Σ (lettre grecque « sigma », initiale de « somme »).

Propriété — Nombre de termes

La somme $\sum_{k=m}^n u_k$ comporte exactement $\boxed{n - m + 1}$ termes (« dernier indice – premier indice + 1 »).

Exemple

- $\sum_{k=1}^4 (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ (4 termes) ;
- $\sum_{k=0}^3 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$ (4 termes, car $3 - 0 + 1 = 4$) ;
- $\sum_{k=2}^5 \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$ (4 termes) ;
- $\sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} = n$ et $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

Remarque — L'indice est muet

La lettre k n'apparaît pas dans le résultat : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre *non déjà utilisée*. Ainsi $\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{j=1}^n j^2$. En revanche, n (la borne) n'est **pas** muet : la somme dépend de n .

Piège à éviter

- Ne jamais utiliser comme indice une lettre déjà présente : $\sum_{n=1}^n n$ n'a **aucun sens**.
- Une constante sommée N fois donne N fois la constante : $\sum_{k=1}^n 5 = 5n$ et non 5.

- Le nombre de termes de $\sum_{k=3}^n u_k$ est $n - 2$, pas $n - 3$ ni n .

Remarque — Définition par récurrence — convention

Pour $n \geq m$: $\sum_{k=m}^m u_k = u_m$ et $\sum_{k=m}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=m}^n u_k \right) + u_{n+1}$. C'est cette relation qui sert dans toute démonstration par récurrence d'une formule de somme. Par convention, une somme dont l'indice de départ dépasse l'indice d'arrivée (somme *vide*) vaut 0.

3. Écrire une somme avec le symbole Σ

Méthode — Passer d'une somme « avec des points » à l'écriture Σ

- Repérer la *régularité* : écrire le terme numéro k en fonction de k (le **terme général**).
- Déterminer l'indice du *premier* et du *dernier* terme.
- Vérifier** en calculant le premier terme, le dernier, et le nombre de termes.

Exemple

- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \sum_{k=0}^n (2k + 1)$ ($n + 1$ termes impairs).
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$: le facteur $(-1)^{k+1}$ gère l'**alternance des signes**.
- $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n + 1) = \sum_{k=1}^n k(k + 1)$.
- $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} = \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k + 1)}$.

Astuce

Pour une **alternance de signes**, on utilise $(-1)^k$ (le terme d'indice pair est positif) ou $(-1)^{k+1}$ (le terme d'indice impair est positif). Pour les **nombre pairs**, on écrit $2k$; pour les **impairs**, $2k + 1$ ou $2k - 1$.

Règles de calcul sur les sommes

4. Linéarité

Propriété — Linéarité de Σ

Pour tous réels u_k, v_k ($m \leq k \leq n$) et tous réels λ, μ indépendants de k :

$$\sum_{k=m}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n v_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=m}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=m}^n u_k,$$

et plus généralement $\sum_{k=m}^n (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=m}^n u_k + \mu \sum_{k=m}^n v_k$.

Démonstration. Par commutativité et associativité de l'addition, on peut regrouper les termes : $(u_m + v_m) + \dots + (u_n + v_n) = (u_m + \dots + u_n) + (v_m + \dots + v_n)$. Par distributivité, $\lambda u_m + \dots + \lambda u_n = \lambda(u_m + \dots + u_n)$. ■

Exemple

Sachant que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (démontré au § suivant) :

$$\sum_{k=1}^n (3k - 2) = 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 2 = \frac{3n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Piège à éviter — Ce que Σ ne permet PAS

En général : $\sum_k u_k v_k \neq \left(\sum_k u_k\right) \left(\sum_k v_k\right)$, $\sum_k \frac{1}{u_k} \neq \frac{1}{\sum_k u_k}$, $\left(\sum_k u_k\right)^2 \neq \sum_k u_k^2$.

Contre-exemple : $\sum_{k=1}^2 k \cdot k = 1 + 4 = 5$ alors que $\left(\sum_{k=1}^2 k\right)^2 = 9$.

De même, $\sum_{k=1}^n (k+5) = \frac{n(n+1)}{2} + 5n$ et **non** $\frac{n(n+1)}{2} + 5$: la constante est sommée n fois.

5. Relation de Chasles (découpage)

Propriété — Relation de Chasles

Pour $m \leq p < n$ entiers :

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k.$$

En particulier : $\sum_{k=m}^n u_k = u_m + \sum_{k=m+1}^n u_k = \sum_{k=m}^{n-1} u_k + u_n$ («sortir» le premier ou le dernier terme).

Exemple

$$\sum_{k=5}^{20} k = \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^4 k = 210 - 10 = 200.$$

6. Changement d'indice

Propriété — Changements d'indice usuels

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Translation ($j = k + p$) : $\sum_{k=m}^n u_{k+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} u_j$.

Renversement ($j = n + m - k$) : $\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{j=m}^n u_{n+m-j}$; en particulier $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{j=0}^n u_{n-j}$.

Démonstration. Quand k décrit $\llbracket m, n \rrbracket$, $j = k + p$ décrit exactement $\llbracket m + p, n + p \rrbracket$ (une valeur de j pour chaque valeur de k) : les deux sommes contiennent les mêmes termes. De même, $j = n + m - k$ décrit $\llbracket m, n \rrbracket$ «à l'envers» ; seul l'ordre des termes change, la somme est inchangée. ■

Méthode — Effectuer un changement d'indice

1. Poser la nouvelle variable ($j = k + 1, j = n - k, \dots$) et exprimer k en fonction de j .
2. Calculer les **nouvelles bornes** (valeurs de j pour $k = m$ et $k = n$) ; si elles se retrouvent « à l'envers », les remettre dans l'ordre croissant.
3. Remplacer k par son expression en j dans le terme général.

Exemple

- $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{j=1}^n j^2 \quad (j = k+1 : k=0 \rightarrow j=1, k=n-1 \rightarrow j=n).$
- $\sum_{k=p}^q (k-p+1) = \sum_{j=1}^{q-p+1} j = \frac{(q-p+1)(q-p+2)}{2} \quad (j = k-p+1).$
- $\sum_{k=1}^n k(n-k)$ est inchangée par $j = n-k$; c'est l'idée de Gauss (voir § 4).

Piège à éviter

Dans un changement d'indice, on change **à la fois** le terme général **et** les bornes. Erreur fréquente : $\sum_{k=1}^n u_{k+1} = \sum_{k=1}^n u_k$ (faux : à gauche, le terme u_1 manque et u_{n+1} est en trop).

7. Séparer les termes d'indices pairs et impairs**Propriété**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{p=1}^n u_{2p} + \sum_{p=1}^n u_{2p-1} \quad (n \text{ termes pairs et } n \text{ termes impairs}).$

Exemple

$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = \sum_{p=1}^n 2p - \sum_{p=1}^n (2p-1) = \sum_{p=1}^n 1 = n$: on regroupe par paires $(-1+2) + (-3+4) + \dots$, chaque paire vaut 1.

Sommes télescopiques**8. Le principe****Théorème — Somme télescopique**

Soit (v_k) une suite de réels et $m \leq n$. Alors

$$\sum_{k=m}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_m \quad \text{et, de même,} \quad \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0.$$

Démonstration. Par linéarité puis translation d'indice $j = k + 1$ dans la première somme :

$$\sum_{k=m}^n v_{k+1} - \sum_{k=m}^n v_k = \sum_{j=m+1}^{n+1} v_j - \sum_{k=m}^n v_k = \left(\sum_{j=m+1}^n v_j + v_{n+1} \right) - \left(v_m + \sum_{k=m+1}^n v_k \right) = v_{n+1} - v_m.$$

Les termes d'indices $m + 1$ à n apparaissent avec « + » puis avec « - » : ils s'éliminent. ■

$$(v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_n - v_{n-1}) = v_n - v_0$$

seuls le dernier « + » et le premier « - » survivent (soulignés)

FIG. — Comme les tubes d'une longue-vue qui rentrent les uns dans les autres, les termes intermédiaires disparaissent.

Méthode — Reconnaître et calculer une somme télescopique

1. Chercher à écrire le terme général sous la forme $u_k = v_{k+1} - v_k$ (ou $v_k - v_{k-1}$).
2. Outils classiques : *décomposition d'une fraction* ($\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$), *quantité conjuguée* pour les racines, *factorielles* ($k \cdot k! = (k+1)! - k!$).
3. Appliquer le théorème **en vérifiant le signe** : c'est « dernier terme - premier terme » si $u_k = v_{k+1} - v_k$, et l'opposé si $u_k = v_k - v_{k+1}$.

9. Exemples fondamentaux

Exemple — Décomposition d'une fraction

Pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Avec $v_k = \frac{1}{k}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = - \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = -(v_{n+1} - v_1) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exemple — Quantité conjuguée

Pour $k \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Exemple — Factorielles

Pour $k \geq 1$: $(k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = k \cdot k!$. Donc $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$.

Astuce — Télescopage « à distance 2 »

Si $u_k = v_k - v_{k+2}$, il reste *deux* termes au début et *deux* à la fin :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Pour s'en convaincre, écrire les trois premières et les trois dernières lignes.

10. Une application : majorer une somme

Exemple — Majoration de $\sum 1/k^2$

Pour $k \geq 2 : k^2 \geq k(k-1) > 0$, donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. En sommant pour k de 2 à n (télescopage) :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Remarque

On ne sait pas calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ explicitement, mais le télescopage permet de l'**encadrer**. C'est une idée qui reviendra souvent : *comparer* terme à terme avec une somme télescopique.

Les sommes usuelles

11. Sommes des puissances des entiers

Théorème — Sommes de Gauss, d'Archimède et de Nicomaque

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démonstration. • **Somme des entiers (idée de Gauss).** Notons $S = \sum_{k=1}^n k$. Par renversement d'indice, $S = \sum_{k=1}^n (n+1-k)$. En additionnant :

$$2S = \sum_{k=1}^n (k + (n+1-k)) = \sum_{k=1}^n (n+1) = n(n+1), \quad \text{d'où} \quad S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• **Somme des carrés (télescopage).** Pour tout k , $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Sommons pour k de 1 à n :

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Donc $3 \sum k^2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = (n+1) \left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2} \right] = (n+1) \cdot \frac{2n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, d'où la formule.

• **Somme des cubes (récurrence).** Soit $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ». *Initialisation* : $1^3 = 1 = \frac{1 \cdot 4}{4}$. *Hérédité* : si $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

c'est $\mathcal{P}(n+1)$. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. ■

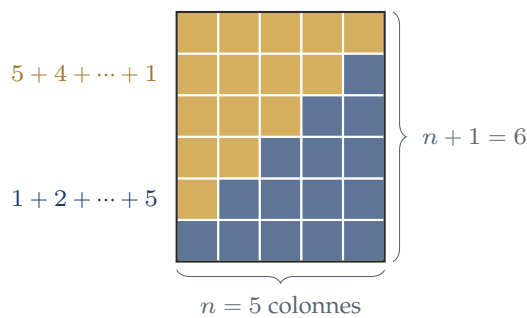


FIG. — $2(1 + 2 + \dots + n) = n(n + 1)$.

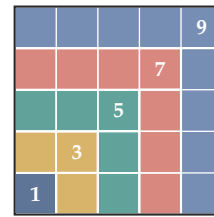


FIG. — $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Remarque — Lecture des figures

À gauche : deux « escaliers » identiques (bleu et or) remplissent un rectangle $n \times (n + 1)$: c'est la preuve de Gauss en image. À droite : chaque « équerre » (gnomon) ajoute le nombre impair suivant et transforme le carré $(k - 1) \times (k - 1)$ en carré $k \times k$. Algébriquement : $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} - n = n^2$.

Astuce — Moyen mnémotechnique

$\sum k^3 = (\sum k)^2$: « la somme des cubes est le carré de la somme ». Par exemple $1 + 8 + 27 + 64 = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$. **Vérifier** toujours une formule pour $n = 1$ et $n = 2$!

Boîte à outils — La méthode du polynôme (pour retrouver les formules)

Si l'on trouve un polynôme P tel que $P(X + 1) - P(X) = Q(X)$, alors par télescopage $\sum_{k=1}^n Q(k) = P(n + 1) - P(1)$.

Le degré de P est celui de Q plus un. Pour $Q(X) = X$, on cherche P de degré 2 : $P(X) = \frac{X(X-1)}{2}$ convient, d'où $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$. Pour $Q(X) = X^2$ on cherche P de degré 3, pour $Q(X) = X^3$ de degré 4 (voir exercices).

12. Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété

Si $u_k = a + kr$ (suite arithmétique), alors pour $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = (n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}.$$

Démonstration. Même idée que Gauss : en renversant, $u_k + u_{n+m-k} = 2a + (n + m)r = u_m + u_n$ ne dépend pas de k ; donc $2 \sum u_k = (n - m + 1)(u_m + u_n)$. ■

Exemple

$$\sum_{k=10}^{30} (4k + 1) = 21 \times \frac{41 + 121}{2} = 21 \times 81 = 1701.$$

13. Somme géométrique

Théorème — Somme géométrique

Soit q un réel et $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1, \\ n + 1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Plus généralement, pour $q \neq 1$ et $m \leq n$: $\sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$.

Démonstration. Soit $S = \sum_{k=0}^n q^k$. Alors $qS = \sum_{k=0}^n q^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} q^j$, d'où par télescopage

$$S - qS = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

Si $q \neq 1$, on divise par $1 - q \neq 0$. Si $q = 1$, la somme contient $n + 1$ termes égaux à 1. Pour la forme générale : $\sum_{k=m}^n q^k = q^m \sum_{j=0}^{n-m} q^j$ ($j = k - m$). ■

À retenir — Formule « à réciter »

$$\sum (\text{termes géométriques}) = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \quad (\text{raison} \neq 1).$$

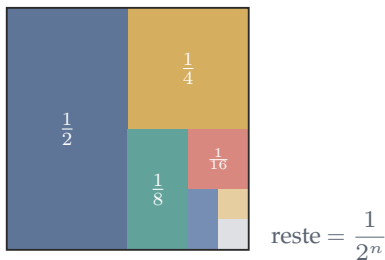


FIG. — On découpe un carré d'aire 1 : la moitié, puis la moitié du reste, etc. Après n étapes, il reste $\frac{1}{2^n}$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Exemple

- $\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$
- $\sum_{k=1}^n 3^k = 3 \cdot \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$ (premier terme 3, n termes).
- $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$

Piège à éviter

- Distinguer $q = 1$ (division par 0!) : toujours le mentionner quand q est un paramètre.
- L'exposant au numérateur est le **nombre de termes**, pas le dernier exposant : $\sum_{k=0}^n q^k$ a $n + 1$ termes, d'où q^{n+1} .
- $\sum_{k=0}^n 2^{2k}$ est géométrique de raison 4 (et non 2) : $2^{2k} = 4^k$.

14. Factorisation de $a^n - b^n$

Théorème — Identité de Bernoulli

Pour tous réels a, b et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Démonstration. On développe et on fait apparaître un télescopage :

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k} b^k - a^{n-1-k} b^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) = w_0 - w_n = a^n - b^n,$$

où l'on a posé $w_k = a^{n-k} b^k$ (on a bien $a^{n-1-k} b^{k+1} = w_{k+1}$). ■

Exemple — Cas particuliers

$n = 2 : a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $n = 3 : a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
 $b = 1 : a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + \dots + a^{n-1})$ (on retrouve la somme géométrique).

Exemple — Application arithmétique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{3n} - 1 = 8^n - 1^n = (8 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} 8^k = 7 \times (\text{entier})$: donc 7 divise $2^{3n} - 1$.

Remarque

Si n est **impair**, on remplace b par $-b$: $a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k$. Par exemple
 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

15. Démontrer une formule de somme par récurrence**Méthode — Récurrence pour $\sum_{k=m}^n u_k = f(n)$**

- 1. Initialisation** : vérifier l'égalité pour $n = m$ (la somme se réduit à u_m).
- 2. Hérédité** : supposer $\sum_{k=m}^n u_k = f(n)$; écrire $\sum_{k=m}^{n+1} u_k = \sum_{k=m}^n u_k + u_{n+1} = f(n) + u_{n+1}$ et montrer que cela vaut $f(n+1)$ (*factoriser* plutôt que développer).
- 3. Conclusion** rédigée avec le principe de récurrence.

Astuce

La récurrence *vérifie* une formule connue ; le télescopage ou le changement d'indice permettent de la *trouver*. Face à une formule donnée par l'énoncé, la récurrence est souvent la voie la plus sûre.

Le symbole Π : produits**16. Définition et factorielle**

Définition — Le symbole Π

Soient $m \leq n$ des entiers et $u_m, \dots, u_n$ des réels. On note

$$\prod_{k=m}^n u_k = u_m \times u_{m+1} \times \dots \times u_n \quad (n - m + 1 \text{ facteurs}).$$

Comme pour Σ , l'indice k est muet. Par convention, un produit vide vaut 1.

Définition — Factorielle

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factorielle** n le nombre $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n$, et l'on pose $0! = 1$.

On a la relation fondamentale

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Exemple

$$\prod_{k=1}^4 (2k-1) = 1 \times 3 \times 5 \times 7 = 105; \quad \prod_{k=1}^n 2 = 2^n, \quad \prod_{k=0}^n 2 = 2^{n+1}; \quad \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90.$$

Astuce

Pour simplifier un quotient de factorielles, on écrit la plus grande à partir de la plus petite :

$$\frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1), \quad \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

17. Règles de calcul

Propriété — Règles de calcul sur Π

Pour des réels u_k, v_k ($m \leq k \leq n$), un réel λ indépendant de k et $p \in \mathbb{N}$; notons $N = n - m + 1$ le nombre de facteurs :

- $\prod_{k=m}^n (u_k v_k) = \left(\prod_{k=m}^n u_k \right) \left(\prod_{k=m}^n v_k \right)$ et $\prod_{k=m}^n \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=m}^n u_k}{\prod_{k=m}^n v_k}$ (si les $v_k \neq 0$);
- $\prod_{k=m}^n (\lambda u_k) = \lambda^N \prod_{k=m}^n u_k$ et $\prod_{k=m}^n u_k^p = \left(\prod_{k=m}^n u_k \right)^p$;
- **Chasles** : $\prod_{k=m}^n u_k = \left(\prod_{k=m}^p u_k \right) \left(\prod_{k=p+1}^n u_k \right)$ pour $m \leq p < n$; les **changements d'indice** s'utilisent comme pour Σ ;
- **Lien Π - Σ** : pour $a \neq 0$ et des entiers e_k , $\prod_{k=m}^n a^{e_k} = a^{\sum_{k=m}^n e_k}$;
- un produit est nul **si et seulement si** l'un de ses facteurs est nul.

Démonstration. Commutativité et associativité de la multiplication (comme pour Σ), puis $a^p a^q = a^{p+q}$ pour le lien avec Σ . ■

Exemple — Produits classiques

- $\prod_{k=1}^n 2^k = 2^{1+2+\dots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et plus généralement $\prod_{k=1}^n q^k = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
- $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$ (produit des n premiers nombres pairs).
- $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ (on complète par les pairs).

Piège à éviter

- $\prod_{k=1}^n (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n u_k$ et **non** $\lambda \prod_{k=1}^n u_k$: la constante est multipliée *autant de fois qu'il y a de facteurs*.
- $\prod (u_k + v_k) \neq \prod u_k + \prod v_k$: $\prod_{k=1}^2 (1+1) = 4$ alors que $\prod_{k=1}^2 1 + \prod_{k=1}^2 1 = 2$.
- $(2n)! \neq 2n!$ et $(2n)! \neq 2^n n!$: $4! = 24$, $2 \cdot 2! = 4$, $2^2 \cdot 2! = 8$.

18. Produits télescopiques

Théorème — Produit télescopique

Si $v_m, v_{m+1}, \dots, v_{n+1}$ sont des réels **non nuls**, alors

$$\prod_{k=m}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_m}.$$

Démonstration. $\frac{v_{m+1}}{v_m} \times \frac{v_{m+2}}{v_{m+1}} \times \dots \times \frac{v_{n+1}}{v_n}$: chaque numérateur se simplifie avec le dénominateur suivant (récurrence immédiate sur n). ■

Exemple

- $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$.
- Pour $n \geq 2$: $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$, d'où

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Méthode — Calculer un produit

1. Factoriser chaque facteur (identités remarquables) et **scinder** en produits plus simples.
2. Reconnaître un quotient $\frac{v_{k+1}}{v_k}$ (télescopage), une puissance ($\prod q^k$), ou une factorielle.
3. Contrôler sur $n = 2$ ou $n = 3$ en calculant le produit à la main.

Fiche de révision — l'essentiel en un coup d'œil

À retenir — Notation

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m + \dots + u_n : n - m + 1 \text{ termes.}$$

L'indice k est muet ; n ne l'est pas.

$$\sum_{k=1}^n c = nc, \quad \sum_{k=0}^n c = (n+1)c.$$

À retenir — Règles

Linéarité : $\sum (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum u_k + \mu \sum v_k.$

Chasles : $\sum_m^n = \sum_m^p + \sum_{p+1}^n.$

Translation : $\sum_{k=m}^n u_{k+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} u_j.$

Renversement : $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{j=0}^n u_{n-j}.$

Interdit : $\sum u_k v_k \neq \sum u_k \sum v_k.$

À retenir — Télescopage

$$\sum_{k=m}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_m.$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}; \quad \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k};$$

$$k \cdot k! = (k+1)! - k!.$$

À retenir — Sommes usuelles ($n \geq 1$)

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Géométrie ($q \neq 1$) : $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Arithmétique : $N \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

À retenir — Produits

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \quad 0! = 1, \quad (n+1)! = (n+1)n!.$$

$$\prod \lambda u_k = \lambda^N \prod u_k; \quad \prod_{k=1}^n q^k = q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

$$\prod_{k=1}^n 2k = 2^n n!; \quad \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Télescopage : $\prod_{k=m}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_m}.$

À retenir — Σ et Π : le parallèle

Notion	Somme Σ	Produit Π
élément neutre (cas vide)	0	1
constante c (N termes)	$\sum c = Nc$	$\prod c = c^N$
facteur λ	$\sum \lambda u_k = \lambda \sum u_k$	$\prod \lambda u_k = \lambda^N \prod u_k$
télescopage	$\sum (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_m$	$\prod \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_m}$

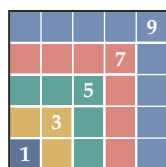


FIG. — $\sum (2k-1) = n^2$

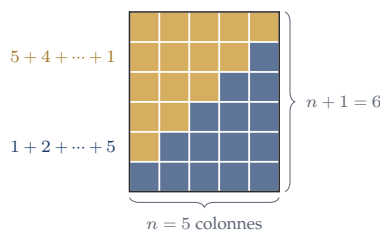


FIG. — $2 \sum k = n(n+1)$

QCM d'auto-évaluation — 21 questions

Une seule proposition est correcte par question. Dans tout le QCM, n désigne un entier naturel non nul. Les corrigés justifiés figurent dans le document *Corrigés* accompagnant ce chapitre.

19. Niveau ★☆☆☆ / ★★☆☆ — Moyen (questions 1 à 7)

1. $\sum_{k=1}^4 (2k+1)$ vaut :
(A) 20 (B) 24 (C) 16 (D) 25
2. Pour $n \geq 3$, le nombre de termes de la somme $\sum_{k=3}^n u_k$ est :
(A) n (B) $n-3$ (C) $n-2$ (D) $n+3$
3. $\sum_{k=1}^n 5$ est égal à :
(A) 5 (B) $5n$ (C) $5(n+1)$ (D) $n+5$
4. $\sum_{k=1}^{10} k$ vaut :
(A) 45 (B) 100 (C) 50 (D) 55
5. $\sum_{k=0}^4 2^k$ vaut :
(A) 31 (B) 32 (C) 15 (D) 63
6. $\prod_{k=1}^4 k$ vaut :
(A) 10 (B) 4 (C) 24 (D) 120
7. $\prod_{k=1}^n 3$ est égal à :
(A) $3n$ (B) 3^n (C) n^3 (D) 3^{n+1}

20. Niveau ★★☆☆ / ★★★★★ — Bon (questions 8 à 14)

8. $\sum_{k=1}^n (2k-1)$ est égal à :
(A) n^2 (B) $n(n+1)$ (C) $2n^2-1$ (D) n^2-1
9. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ est égal à :
(A) $\frac{1}{n+1}$ (B) $\frac{n}{n+1}$ (C) $1-\frac{1}{n}$ (D) $\frac{n+1}{n}$
10. $\prod_{k=1}^n (2k)$ est égal à :
(A) $2n!$ (B) $(2n)!$ (C) $2^n n!$ (D) $2^n + n!$

11. La somme $\sum_{k=2}^{n+1} u_{k-1}$ est égale à :

(A) $\sum_{j=2}^{n+1} u_j$ (B) $\sum_{j=3}^{n+2} u_j$ (C) $\sum_{j=1}^{n+1} u_j$ (D) $\sum_{j=1}^n u_j$

12. $\sum_{k=0}^n 3^k$ est égal à :

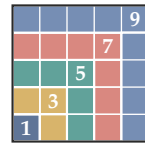
(A) $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$ (B) $\frac{3^n - 1}{2}$ (C) $3^{n+1} - 1$ (D) $\frac{1 - 3^n}{2}$

13. $\prod_{k=1}^n 2^k$ est égal à :

(A) 2^{n^2} (B) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (C) 2^{n+1} (D) $n \cdot 2^n$

14. La figure ci-contre illustre l'égalité :

(A) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (B) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 (C) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ (D) $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$



21. Niveau ★★★★★ — Difficile (questions 15 à 21)

15. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ est égal à :

(A) 0 (B) $-n$ (C) n (D) $2n$

16. $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$ est égal à :

(A) $n \cdot n!$ (B) $(n+1)!$ (C) $n! - 1$ (D) $(n+1)! - 1$

17. Pour $n \geq 2$, $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ est égal à :

(A) $\frac{n+1}{2n}$ (B) $\frac{1}{n}$ (C) $\frac{n-1}{n}$ (D) $\frac{n+1}{n}$

18. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ est égal à :

(A) $\sqrt{n} - 1$ (B) $\sqrt{n+1} + 1$ (C) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (D) $\sqrt{n+1} - 1$

19. Laquelle de ces égalités est vraie pour *tous* réels $\lambda, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$?

(A) $\sum_{k=1}^n u_k v_k = \left(\sum_{k=1}^n u_k\right) \left(\sum_{k=1}^n v_k\right)$ (B) $\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2$
 (C) $\prod_{k=1}^n (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n u_k$ (D) $\prod_{k=1}^n (u_k + v_k) = \prod_{k=1}^n u_k + \prod_{k=1}^n v_k$

20. $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k}$ est égal à :

(A) $3^n - 2^n$ (B) 6^n (C) $\frac{3^n - 2^n}{5}$ (D) $3^n + 2^n$

21. $\sum_{k=1}^n k(n-k)$ est égal à :

(A) $\frac{n^3}{6}$ (B) $\frac{n^2(n+1)}{2}$ (C) $\frac{n(n-1)}{2}$ (D) $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

Exercices d'application

Les exercices sont classés par difficulté croissante (★☆☆☆ à ★★★★★). Les corrigés détaillés sont dans le document *Corrigés*.

Exercice 1 — Écrire et calculer

★☆☆☆ Basique

1. Écrire à l'aide du symbole Σ ou Π : $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$; $B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{20}$; $C = 3 \times 6 \times 9 \times \dots \times (3n)$.
2. Calculer en fonction de n : $S_1 = \sum_{k=1}^n (3k - 2)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n (2k + 1)$.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$.
4. Soient $p \leq q$ deux entiers. Par un changement d'indice, montrer que $\sum_{k=p}^q (k - p + 1) = \frac{(q - p + 1)(q - p + 2)}{2}$.

Exercice 2 — Sommes géométriques

★★☆☆ Classique

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \neq 1$. Établir que $\sum_{k=0}^n a r^k = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.
2. Calculer $T_1 = \sum_{k=1}^n 3^k$, $T_2 = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k$, $T_3 = \sum_{k=0}^n 2^{2k+1}$, $T_4 = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{5^k}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n x^{2k}$ en distinguant les cas.

Exercice 3 — Trois méthodes pour $\sum k(k+1)$

★★☆☆ Important

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)$. On veut montrer que $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

1. *Par linéarité* : utiliser les sommes usuelles.
2. *Par récurrence* sur n .
3. *Par télescopage* : vérifier que $k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$ et conclure.
4. En déduire $\sum_{k=1}^n k(n-k)$ en fonction de n .

Exercice 4 — Sommes télescopiques

★★☆☆ Classique

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $A_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right);$

2. $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}};$

3. $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (on cherchera a tel que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = a \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right);$

4. $D_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ (écrire $k = (k+1) - 1$).

Exercice 5 — Factorisation de $a^n - b^n$

★★☆☆ Important

Soient $n \geq 2$ un entier et $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer l'identité remarquable $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise $6^n - 1$ et 11 divise $3^{5n} - 1$.

4. Factoriser $x^5 - 1$ puis $x^5 + 32$ (penser à $b = -2$).

Exercice 6 — Calculs de produits

★★☆☆ Classique

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (et $n \geq 2$ pour P_2) :

$$P_1 = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right), \quad P_2 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right), \quad P_3 = \prod_{k=1}^n 3^k, \quad P_4 = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k},$$

en exprimant P_4 à l'aide de factorielles.

Exercice 7 — La somme $\sum k 2^k$

★★☆☆ Original

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^n k 2^k$.

1. Déterminer deux réels a, b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $v_k = (ak+b) 2^k$: $v_{k+1} - v_k = k 2^k$.

2. En déduire S_n , puis vérifier le résultat pour $n = 1, 2, 3$.

3. Autre méthode. Calculer $2S_n - S_n$ à l'aide d'un changement d'indice et retrouver S_n .

Exercice 8 — Une somme alternée

★★☆☆ Classique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $U_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$ en séparant les termes d'indices pairs et impairs. En déduire $\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k k^2$.

Exercice 9 — La méthode du polynôme

★★★★ Original

- Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 0$ et, pour tout réel x , $P(x+1) - P(x) = x^2$.
- En déduire $\sum_{k=0}^n k^2$ et retrouver la formule du cours.
- Même démarche avec un polynôme Q de degré 4 tel que $Q(0) = 0$ et $Q(x+1) - Q(x) = x^3$: retrouver $\sum_{k=1}^n k^3$.

Exercice 10 — Encadrements par télescope

★★★★ Original

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
- Montrer que, pour tout $k \geq 1$: $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.
- En déduire l'encadrement $2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.
- Application : donner la partie entière de $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Problèmes de synthèse

Exercice 11 — Sommes et produits trigonométriques

★★★★ Important

Partie A — Une somme de cosinus. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin \frac{x}{2} \neq 0$.

A1. À l'aide des formules de transformation, montrer que pour tout entier k :

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) x \right).$$

A2. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $C_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$.

A3. Application : calculer $\sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{2k\pi}{2n+1} \right)$.

Partie B — Un produit de cosinus. Soit $x \in]0, \pi[$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{x}{2^k} \right)$.

B1. Justifier que $\sin \frac{x}{2^k} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis montrer que $\cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}}$.

B2. En déduire, par télescopage, que $P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$.

B3. Calculer $\prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{\pi}{2^{k+1}} \right)$ et vérifier le résultat pour $n = 1$.

(12 pts)

Exercice 12 — Factorielles, produits et encadrements

★★★★ Original

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!$ et en déduire que $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

2. Montrer que $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

3. *Un encadrement plus fin.*

a) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $k(n+1-k) \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^2$.

b) À l'aide d'un changement d'indice, montrer que $(n!)^2 = \prod_{k=1}^n k(n+1-k)$.

c) En déduire que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$.

4. Montrer que $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

5. Soit x un réel. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1-x) \prod_{k=0}^n (1+x^{2^k}) = 1 - x^{2^{n+1}}.$$

En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^{2^k}}\right)$.

(12 pts)

Compléments : histoire, applications, ouverture

22. Un peu d'histoire

Remarque — Des sommes avant les symboles

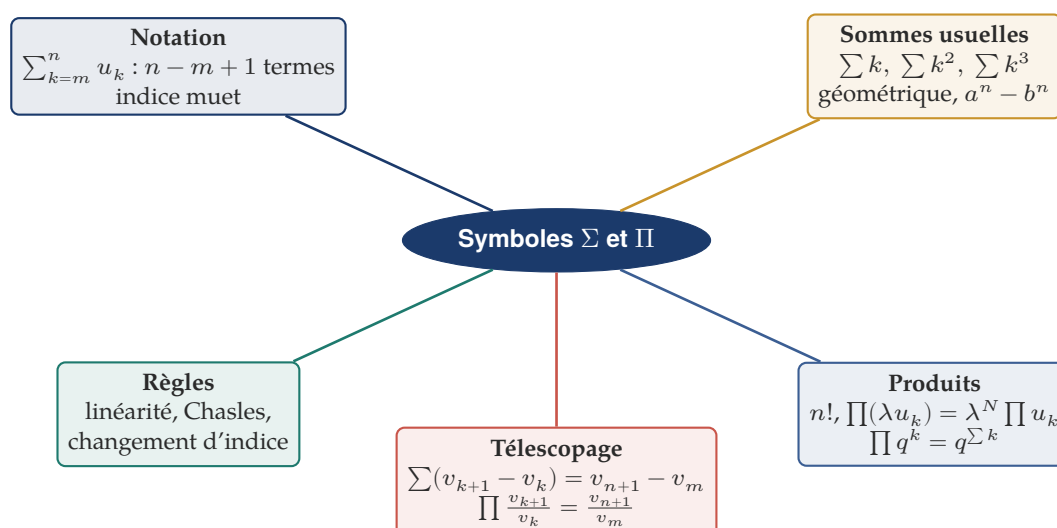
Archimède (III^e s. av. J.-C.) utilise déjà la somme des carrés pour calculer l'aire sous une parabole; **Nicomaque de Gérase** (I^{er} s.) observe que les cubes s'obtiennent en sommant des nombres impairs consécutifs; **Al-Karaji** (Bagdad, vers 1000) démontre la formule $\sum k^3 = (\sum k)^2$ par un argument qui préfigure la récurrence. Le symbole Σ est introduit par **Leonhard Euler** en 1755; le symbole Π pour les produits est popularisé par **Gauss** en 1812, et la notation $n!$ est due à **Christian Kramp** (1808).

23. Applications concrètes

Boîte à outils — Où rencontre-t-on Σ et Π ?

- **Informatique** : une boucle `for k in range(m, n+1): S = S + u(k)` calcule exactement $\sum_{k=m}^n u_k$; le tri «à bulles» d'une liste de n éléments effectue $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons.
- **Finance** : un capital placé à intérêts composés au taux t devient $C(1+t)^n$; la valeur accumulée de versements réguliers est une **somme géométrique**.
- **Physique** : la distance parcourue lors de rebonds successifs d'une balle (chaque rebond à une fraction de la hauteur précédente) est une somme géométrique.
- **Dénombrement** : le nombre de façons d'ordonner n objets est $n!$ (chapitre de Terminale).

24. Carte mentale du chapitre



25. Glossaire des notations

Notation	Signification	Notation	Signification
$\sum_{k=m}^n u_k$	$u_m + \dots + u_n$	$\prod_{k=m}^n u_k$	$u_m \times \dots \times u_n$
k	indice muet	$n - m + 1$	nombre de termes
$\llbracket m, n \rrbracket$	entiers de m à n	$n!$	factorielle n
terme général	u_k en fonction de k	télescopage	$\sum (v_{k+1} - v_k)$

26. Auto-évaluation

Je suis capable de...	Oui	Pas encore
écrire une somme/un produit avec Σ/Π et compter ses termes	☐	☐
utiliser linéarité, Chasles et changement d'indice	☐	☐
reconnaître et calculer une somme ou un produit télescopique	☐	☐
citer et démontrer $\sum k, \sum k^2, \sum k^3$	☐	☐
calculer une somme géométrique (premier terme, raison, nombre de termes)	☐	☐
factoriser $a^n - b^n$ et l'appliquer en arithmétique	☐	☐
manipuler $n!$ et les produits usuels	☐	☐
démontrer une formule de somme par récurrence	☐	☐

27. Pour aller plus loin (perspective CPGE)

Remarque

En classes préparatoires, ces outils s'enrichissent : **sommes doubles** $\sum_i \sum_j a_{i,j}$ et interversion, **coefficients binomiaux** et formule du **binôme de Newton** $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, et surtout passage à la limite : les **séries**. Par exemple, la majoration $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$ vue en § 4 montre que cette somme « converge » ; Euler a prouvé en 1735 que sa limite vaut $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$ — un des plus beaux résultats de l'histoire des mathématiques.

Fin du chapitre — Les symboles Σ et Π • Maths Elites • R. Abed