

# La rédaction obligatoire en 1ère Bac Sciences Mathématiques

Ce que l'élève doit *écrire* — et pas seulement savoir — pour obtenir la totalité des points, sur les quatre chapitres fondateurs de l'année : logique, ensembles et applications, fonctions, suites. Chaque attendu est illustré par un **modèle rédigé** extrait du cours.

1ÈRE BAC SM

LOGIQUE • ENSEMBLES • FONCTIONS • SUITES

SOCLE DE LA TERMINALE SM

En 1ère Sciences Mathématiques, l'élève passe du *calcul* à la *démonstration*. La logique et les ensembles fournissent le **langage** ; les fonctions et les suites sont le premier **terrain** où ce langage est noté. Une réponse juste mais mal rédigée est une réponse **incomplète** : cette fiche fixe, pour chaque famille de démonstrations, ce que l'élève **doit impérativement écrire**. Elle prépare directement la fiche de Terminale SM.

**Règle d'or.** Toute variable est **introduite** (« Soit  $x \in \mathbb{R}$  », « Soient  $x, x' \in E$  ») avant emploi ; le **type de raisonnement** est **annoncé** dès la première ligne (contraposée, absurde, récurrence, disjonction de cas) ; les symboles  $\Rightarrow$  et  $\Leftrightarrow$  ne remplacent **jamais** le mot « donc » ; chaque étape est reliée par un **connecteur** (donc, car, or, ainsi) ; chaque question se termine par une **phrase-réponse**.

## PARTIE A Logique et raisonnements

### 01 Quantificateurs, négation & contre-exemple

Chap. 1 · Propositions, fonctions propositionnelles, quantificateurs

#### ATTENDUS

1. **Négation d'un énoncé quantifié** : échanger  $\forall \leftrightarrow \exists$  **dans l'ordre**, conserver les ensembles de quantification, puis nier la propriété finale ( $<$  devient  $\geq$  ;  $=$  devient  $\neq$  ; « et » devient « ou »).
2. **L'ordre des quantificateurs** ne se permute pas :  $\forall x, \exists y$  (le  $y$  dépend de  $x$ ) n'est pas  $\exists y, \forall x$  (un même  $y$  pour tous).
3. **Réfuter un « pour tout »** : exhiber un **contre-exemple explicite** et le **vérifier** par le calcul.
4. **Prouver un « il existe »** : **donner** l'élément (ou le construire), puis vérifier qu'il convient.

## MODÈLES RÉDIGÉS

Écrire la négation de  $P : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$ .

$\bar{P}$  (non  $P$ ) :  $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (|x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon)$ .

La négation de «  $A \Rightarrow B$  » est «  $A$  et non  $B$  » : l'implication disparaît.

La proposition «  $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \mid n \Rightarrow 6 \mid n$  » est-elle vraie ?

Elle est **fausse**. Contre-exemple :  $n = 9$ . On a  $3 \mid 9$  (car  $9 = 3 \times 3$ ) mais  $6 \nmid 9$  (car  $9 = 6 \times 1 + 3$  avec  $0 < 3 < 6$ ). La proposition est donc fausse ; en revanche «  $6 \mid n \Rightarrow 3 \mid n$  » est vraie ( $n = 6k = 3(2k)$ ).

Source : Cours Logique, § Condition nécessaire / suffisante

## FAUTE SANCTIONNÉE

Nier «  $\forall x, P(x)$  » par «  $\forall x, \bar{P}(x)$  » ; nier «  $a < b$  » par «  $a > b$  » (oubli du cas d'égalité) ; permuter  $\forall$  et  $\exists$  ; « réfuter » un énoncé général avec un exemple **qui vérifie** l'énoncé, ou un contre-exemple **non vérifié**.

## 02 Implication & équivalence

Chap. 1 · Connecteurs logiques, CN / CS, réciproque

### ATTENDUS

1. **Démontrer**  $P \Rightarrow Q$  : « Supposons  $P$ . [...] Donc  $Q$ . » On ne traite jamais le cas «  $P$  fausse ».
2. **Démontrer**  $P \Leftrightarrow Q$  : soit **deux implications** séparées et annoncées ( $\Rightarrow$ ) puis ( $\Leftarrow$ ) ; soit une **chaîne d'équivalences**, chacune justifiée.
3. **Élever au carré** n'est une équivalence que si les deux membres sont **de même signe** : le dire ; sinon, raisonner par implication puis **vérifier** les solutions.
4. Ne jamais conclure la **réciproque**  $Q \Rightarrow P$  d'une implication démontrée  $P \Rightarrow Q$ .

## MODÈLES RÉDIGÉS

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer :  $x \in ]-1, 1] \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \leq 0$ .

Supposons  $-1 < x \leq 1$ . Alors  $x - 1 \leq 0$  et  $x + 1 > 0$ . Le quotient d'un nombre négatif ou nul par un nombre strictement positif est négatif ou nul, donc  $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$ .  $\square$

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer :  $|a + b| = |1 + ab| \Leftrightarrow (|a| = 1 \text{ ou } |b| = 1)$ .

Les deux membres étant **positifs**, l'élévation au carré est une équivalence :

$$|a + b| = |1 + ab| \Leftrightarrow (a + b)^2 = (1 + ab)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 1 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(1 - b^2) = 0,$$

car  $a^2 + b^2 - 1 - a^2b^2 = a^2(1 - b^2) - (1 - b^2)$ . Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est :  $a^2 = 1$  ou  $b^2 = 1$ , c'est-à-dire  $|a| = 1$  ou  $|b| = 1$ .  $\square$

Source : Cours Logique, § Équivalence — exemples (a) et (b)

### FAUTE SANCTIONNÉE

Écrire « $\Leftrightarrow$ » entre deux lignes sans que la réciproque soit vraie (carré, division par une quantité pouvant s'annuler) ; utiliser « $\Rightarrow$ » comme abréviation de «donc» au milieu d'une phrase ; démontrer une seule implication et conclure à l'équivalence.

## 03 Raisonnement par contraposée

Chap. 1 ·  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

### ATTENDUS

1. **Annoncer** : «Montrons la contraposée :  $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ .»
2. **Écrire explicitement**  $\overline{Q}$  et  $\overline{P}$  (avant de calculer).
3. **Conclure** : «Par contraposition,  $P \Rightarrow Q$ .»

### MODÈLE RÉDIGÉ

Soit  $x \in ]-1, +\infty[$ . Montrer :  $x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1 + \frac{x}{2}$ .

Montrons la contraposée :  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 0$ .

Supposons  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ . Les deux membres sont positifs (car  $x > -1$  donne  $1 + \frac{x}{2} > \frac{1}{2} > 0$ ), donc on peut élever au carré :  $1 + x = 1 + x + \frac{x^2}{4}$ , d'où  $\frac{x^2}{4} = 0$ , soit  $x = 0$ .

Par contraposition :  $x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1 + \frac{x}{2}$ .  $\square$

Source : Cours Logique, § Contraposée — exemple (b)

### FAUTE SANCTIONNÉE

Confondre **contraposée** ( $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ) et **réciproque** ( $Q \Rightarrow P$ ) ; démarrer le calcul sans annoncer le raisonnement ; oublier la phrase de conclusion «par contraposition».

## 04 Raisonnement par l'absurde

Chap. 1 · supposer  $\overline{P}$ , aboutir à une contradiction

### ATTENDUS

1. **Annoncer** : « Supposons par l'absurde que  $\overline{P}$ . »
2. **Nommer la contradiction** obtenue (avec une hypothèse, une propriété connue, ou «  $36 = 25$  »).
3. **Conclure** : « C'est absurde ; donc  $P$  est vraie. »

### MODÈLE RÉDIGÉ

*Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .*

Supposons par l'absurde que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . On écrit  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$  et la fraction **irréductible**. Alors  $p^2 = 2q^2$ , donc  $p^2$  est pair, donc  $p$  est pair (le carré d'un impair est impair) :  $p = 2p'$ . Il vient  $4p'^2 = 2q^2$ , soit  $q^2 = 2p'^2$  :  $q$  est pair. Ainsi 2 divise  $p$  et  $q$ , ce qui **contredit** l'irréductibilité de  $\frac{p}{q}$ . C'est absurde ; donc  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . □

Source : Cours Logique, § Absurde — « le joyau du chapitre »

### FAUTE SANCTIONNÉE

Ne pas préciser « fraction irréductible » (la contradiction disparaît) ; aboutir à une égalité vraie et la prendre pour une contradiction ; confondre absurde et contraposée (dans l'absurde, on suppose  $\overline{P}$  tout entier).

## 05 Disjonction de cas

Chap. 1 · valeurs absolues, racines, parité

### ATTENDUS

1. **Annoncer le découpage** et vérifier qu'il est **exhaustif** (la réunion des cas couvre tout l'ensemble d'étude).
2. Dans chaque cas : résoudre, puis **confronter** la solution trouvée à la condition du cas.
3. **Réunir** les conclusions :  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots$

## MODÈLE RÉDIGÉ

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $|x - 1| + |2x - 3| = 6$ .

Les valeurs critiques sont 1 et  $\frac{3}{2}$ ; on distingue trois cas qui recouvrent  $\mathbb{R}$ .

- Si  $x < 1$  :  $(1 - x) + (3 - 2x) = 6 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ; or  $-\frac{2}{3} < 1$  : solution retenue.
  - Si  $1 \leq x < \frac{3}{2}$  :  $(x - 1) + (3 - 2x) = 6 \Leftrightarrow x = -4$ ; or  $-4 \notin [1, \frac{3}{2}[$  : pas de solution.
  - Si  $x \geq \frac{3}{2}$  :  $(x - 1) + (2x - 3) = 6 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$ ; or  $\frac{10}{3} \geq \frac{3}{2}$  : solution retenue.
- Conclusion :  $S = \{-\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\}$ .

Source : Cours Logique, § Disjonction de cas

## FAUTE SANCTIONNÉE

Oublier un cas (découpage non exhaustif); conserver une «solution» qui n'appartient pas à l'intervalle du cas; ne pas réunir les résultats en une phrase-réponse.

## 06 Raisonnement par récurrence

Chap. 1 · sommes, inégalités, suites — transversal

### ATTENDUS — RÉCURRENCE SIMPLE

1. **Énoncer** la propriété : « Pour  $n \geq n_0$ , notons  $P(n)$  : ... »
2. **Initialisation.** Vérifier  $P(n_0)$  par un calcul explicite (les deux membres).
3. **Hérédité.** « Soit  $n \geq n_0$  fixé tel que  $P(n)$  soit vraie; montrons  $P(n + 1)$ . » Citer l'hypothèse de récurrence au moment où elle sert.
4. **Conclusion.** « D'après le principe de récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ . »

## MODÈLE RÉDIGÉ

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $P(n)$  : «  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$  ».

**Initialisation.**  $S_1 = 1$  et  $\frac{1 \times 2}{2} = 1$  :  $P(1)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n \geq 1$  fixé tel que  $P(n)$  soit vraie. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

donc  $P(n + 1)$  est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence,  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . □

Source : Cours Logique, § Récurrence

Hérédité écrite «supposons  $P(n)$  vraie **pour tout**  $n$ » (c'est supposer le résultat); **oubli de l'initialisation** : la propriété « $9 \mid 10^n + 1$ » est héréditaire ( $10^{n+1} + 1 = 10(10^n + 1) - 9$ ) et pourtant **toujours fausse**; récurrence sans phrase de conclusion.

## PARTIE B Ensembles et applications

### 07 Inclusion & égalité d'ensembles

Chap. 2 · double inclusion, chaînes d'équivalences,  $\mathcal{P}(E)$

#### ATTENDUS

1. **Montrer**  $A \subset B$  : «Soit  $x \in A$ . [...] Donc  $x \in B$ . Ainsi  $A \subset B$ .» (élément **quelconque**, introduit).
2. **Montrer**  $A = B$  : **annoncer** la méthode — *double inclusion* ( $A \subset B$  puis  $B \subset A$ ) ou *chaîne*  $x \in A \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in B$ .
3. **Distinguer**  $\in$  (élément) et  $\subset$  (partie) :  $\{a\} \subset E$  mais  $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$ ;  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ .

#### MODÈLES RÉDIGÉS

On pose  $E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ . Montrer que  $E = ]0, 1]$ .

Raisonnons par **double inclusion**. Posons  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .

•  $E \subset ]0, 1]$  : soit  $y \in E$ ; il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $y = g(x)$ . Comme  $1 + x^2 \geq 1$ , on a  $0 < g(x) \leq 1$ , donc  $y \in ]0, 1]$ .

•  $]0, 1] \subset E$  : soit  $y \in ]0, 1]$ . Posons  $x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$  (défini car  $0 < y \leq 1$ ). Alors  $1 + x^2 = \frac{1}{y^2}$ , donc  $g(x) = y$  (car  $y > 0$ ) :  $y \in E$ .

Par double inclusion,  $E = ]0, 1]$ . □

Soient  $A, B, C$  des parties de  $E$ . Établir  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

Soit  $x \in E$ . D'après les lois de De Morgan :  $x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin C)) \Leftrightarrow (x \in A \setminus B \text{ ou } x \in A \setminus C)$ .

Les deux ensembles ont les mêmes éléments : ils sont égaux. □

Source : Cours Ensembles & applications, exercices corrigés

Prouver une seule inclusion et conclure à l'égalité ; travailler sur un **exemple** au lieu d'un élément quelconque ; écrire «  $a \subset E$  » ou «  $\{a\} \in E$  » ; illustrer par un diagramme de Venn **en guise de preuve**.

## 08 Applications : injective, surjective, bijective

Chap. 2 · image, antécédent, image réciproque, bijection réciproque

### ATTENDUS

1. **Préciser** l'ensemble de départ et d'arrivée :  $f : E \rightarrow F$  ; la nature de  $f$  en dépend.
2. **Injective** : « Soient  $x, x' \in E$  tels que  $f(x) = f(x')$  ; montrons  $x = x'$ . » **Non injective** : exhiber  $x \neq x'$  avec  $f(x) = f(x')$ .
3. **Surjective** : « Soit  $y \in F$  ; cherchons  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$  » — et **vérifier que  $x \in E$** . **Non surjective** : exhiber  $y \in F$  sans antécédent.
4. **Bijective et réciproque** : pour tout  $y \in F$ , l'équation  $f(x) = y$  admet une **unique** solution  $x \in E$  ; conclure par  $f^{-1} : F \rightarrow E, y \mapsto \dots$  (ensembles écrits).
5. **Image réciproque**  $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$  : elle existe **même si  $f$  n'est pas bijective**.

### MODÈLES RÉDIGÉS

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow [2, +\infty[, x \mapsto x^2 - 2x + 3$ . Montrer que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

On a  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

**Injectivité.** Soient  $x, x' \geq 1$  tels que  $f(x) = f(x')$ . Alors  $(x - 1)^2 = (x' - 1)^2$ , donc  $|x - 1| = |x' - 1|$  ; or  $x - 1 \geq 0$  et  $x' - 1 \geq 0$ , d'où  $x = x'$ .

**Surjectivité.** Soit  $y \geq 2$ . Posons  $x = 1 + \sqrt{y - 2}$  : on a  $x \geq 1$ , donc  $x \in [1, +\infty[$ , et  $f(x) = (y - 2) + 2 = y$ .

Donc  $f$  est bijective et  $f^{-1} : [2, +\infty[ \rightarrow [1, +\infty[, y \mapsto 1 + \sqrt{y - 2}$ . □

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$  est-elle injective ?

Non :  $f(2) = \frac{4}{5}$  et  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$ , avec  $2 \neq \frac{1}{2}$ . Donc  $f$  n'est pas injective sur  $\mathbb{R}$ .

Source : Cours Ensembles & applications, exercice « Bijection et réciproque » et problème 1

## FAUTE SANCTIONNÉE

Surjectivité « démontrée » sans vérifier que l'antécédent trouvé **appartient à l'ensemble de départ** ; réciproque donnée sans ses ensembles ; confondre l'**image réciproque**  $f^{-1}(B)$  (un ensemble) et la **bijection réciproque**  $f^{-1}$  ; croire que  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  toujours (seule l'inclusion  $\subset$  est vraie).

## PARTIE C Fonctions numériques

### 09 Domaine, parité, fonction bornée

Chap. Généralités sur les fonctions ·  $D_f$ , symétrie de  $D_f$ , majorant / minorant

#### ATTENDUS

1. **Domaine** :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$  ; écrire les **conditions** (dénominateur  $\neq 0$ , radicande  $\geq 0$ ) puis les **résoudre**.
2. **Parité** : vérifier **d'abord** «  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  », puis calculer  $f(-x)$  ; pour la non-parité, un contre-exemple numérique suffit.
3. **Majorée / minorée** : «  $f$  est majorée par  $M$  sur  $I$  » signifie  $\forall x \in I, f(x) \leq M$  ; **bornée**  $\Leftrightarrow \exists K \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq K$ .
4. **Comparer deux quantités** : étudier le **signe de la différence** (factoriser, carré, etc.).

#### MODÈLE RÉDIGÉ

Montrer que  $f : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $(x - 1)^2 \geq 0$  et  $(x + 1)^2 \geq 0$ , c'est-à-dire  $2x \leq x^2 + 1$  et  $-2x \leq x^2 + 1$ , donc  $|2x| \leq x^2 + 1$ . Comme  $x^2 + 1 > 0$  :  $|f(x)| = \frac{|2x|}{x^2 + 1} \leq 1$ .

Ainsi  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$  :  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . □

Source : Cours Ensembles & applications, problème « fonction bornée »

## FAUTE SANCTIONNÉE

Conclure «  $f$  paire » sans avoir vérifié que  $D_f$  est **symétrique** ; donner un majorant  $M$  qui **dépend de  $x$**  ; confondre *majorant* et *maximum* (le maximum est **atteint** :  $\exists a \in I, f(a) = M$ ).

## 10 Variations, extremums & composée

Chap. Généralités · taux d'accroissement, monotonie de  $g \circ f$

### ATTENDUS

1. **Taux d'accroissement** : « Soient  $x_1, x_2 \in I$  avec  $x_1 \neq x_2$  » ; calculer  $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , simplifier, puis étudier son **signe** sur  $I$ .
2. **Extremum** :  $f$  admet un **minimum**  $m$  en  $a$  sur  $I$  si  $a \in I$ ,  $f(a) = m$  et  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \geq m$  — les **deux** points sont à écrire.
3. **Composée**  $g \circ f$  : vérifier  $f(I) \subset J$  ; même sens de variation  $\Rightarrow g \circ f$  croissante ; sens contraires  $\Rightarrow$  décroissante.

### MODÈLE RÉDIGÉ

Soit  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$ . Étudier ses variations sur  $[1, +\infty[$  et montrer que 2 est le minimum de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

Soient  $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$  avec  $x_1 \neq x_2$ . Alors

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}}{x_2 - x_1} = 1 - \frac{1}{x_1 x_2}.$$

Or  $x_1 x_2 > 1$  (car  $x_1, x_2 \geq 1$  et  $x_1 \neq x_2$ ), donc  $T > 0$  :  $f$  est **strictement croissante** sur  $[1, +\infty[$ .

**Minimum.** Pour tout  $x > 0$  :  $f(x) - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ , et  $f(1) = 2$ . Donc 2 est le minimum de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ , atteint en 1.  $\square$

Source : Série Applications injectives / surjectives, exercice 1

### FAUTE SANCTIONNÉE

Étudier le signe de  $T$  pour **deux valeurs numériques** au lieu de  $x_1, x_2$  quelconques ; annoncer un minimum sans montrer qu'il est **atteint** ; composer sans vérifier  $f(I) \subset J$ .

## 11 Axe & centre de symétrie, périodicité

Chap. Généralités / Étude de fonctions

### ATTENDUS — DEUX CONDITIONS, TOUJOURS

1. **Axe**  $x = a$  : ①  $\forall x \in D_f$ ,  $2a - x \in D_f$  ; ②  $\forall x \in D_f$ ,  $f(2a - x) = f(x)$ .
2. **Centre**  $I(a; b)$  : ①  $\forall x \in D_f$ ,  $2a - x \in D_f$  ; ②  $\forall x \in D_f$ ,  $f(2a - x) + f(x) = 2b$ .

3. Période  $T > 0$  : ①  $\forall x \in D_f, x \pm T \in D_f$  ; ②  $\forall x \in D_f, f(x + T) = f(x)$ .

## MODÈLES RÉDIGÉS

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{20-x}$  sur  $D_f = [0, 20]$ . Montrer que la droite  $x = 10$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}_f$ .

① Soit  $x \in [0, 20] : 0 \leq x \leq 20$  donne  $0 \leq 20 - x \leq 20$ , donc  $20 - x \in D_f$ . ②  $f(20 - x) = \sqrt{20 - x} + \sqrt{20 - (20 - x)} = \sqrt{20 - x} + \sqrt{x} = f(x)$ .

Donc la droite d'équation  $x = 10$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}_f$  ; en particulier  $f$  n'est pas injective ( $f(0) = f(20)$ ).  $\square$

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  sur  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Montrer que  $I(1; 2)$  est un centre de symétrie de  $\mathcal{C}_f$ .

① Si  $x \neq 1$ , alors  $2 - x \neq 1 : 2 - x \in D_f$ . ②  $f(2 - x) = \frac{2(2-x)+1}{(2-x)-1} = \frac{5-2x}{1-x} = \frac{2x-5}{x-1}$ , donc

$f(2-x) + f(x) = \frac{4x-4}{x-1} = 4 = 2 \times 2$ . Donc  $I(1; 2)$  est centre de symétrie de  $\mathcal{C}_f$ .  $\square$

Source : Série Applications, exercice 7 · Fiche « Étude globale d'une fonction »

## FAUTE SANCTIONNÉE

Vérifier seulement la condition ② ; écrire  $f(a-x) = f(a+x)$  sans préciser le domaine ; pour un centre, oublier le facteur 2 dans «  $= 2b$  ».

## 12 Dérivabilité, tangentes & étude de fonction

Chap. Limites · Dérivation · Étude de fonctions

### ATTENDUS

1. **Dérivabilité en  $a$**  : étudier  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  ; si la limite est un réel  $\ell$ , écrire «  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$  » (à droite / à gauche si besoin).
2. **Interprétation** : tangente ( $T$ ) :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  ; limite  $\pm\infty \Rightarrow$  (demi-)tangente verticale ; dérivées à gauche et à droite distinctes  $\Rightarrow$  point anguleux.
3. **Variations** : dériver sur un intervalle où  $f$  est dérivable, factoriser  $f'(x)$ , dresser le **tableau de signes** puis le **tableau de variations**.
4. **Asymptotes** : «  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ , donc la droite  $x = a$  est asymptote verticale » ; «  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ , donc  $y = ax+b$  est asymptote oblique » — toujours **la limite, puis la conclusion géométrique**.

## MODÈLE RÉDIGÉ

$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$  sur  $D_f = ]-\infty, 0] \cup ]2, +\infty[$ . Montrer que  $f$  est dérivable à gauche en 0 et interpréter.

Pour  $x < 0$  :  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x} = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x-2} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ .

Ainsi  $f$  est dérivable à gauche en 0 et  $f'_g(0) = 0$  :  $\mathcal{C}_f$  admet au point  $O(0; 0)$  une **demi-tangente horizontale** à gauche.  $\square$

Source : Exercices de révision — fonctions, 1BAC SM

## FAUTE SANCTIONNÉE

Dériver avec les formules en un point où  $f$  n'est **pas** dérivable (bord d'un radical) ; tableau de variations sans tableau de signes de  $f'$  justifié ; annoncer une asymptote sans écrire la limite qui la justifie.

## PARTIE D Suites numériques

### 13 Bornes & monotonie d'une suite récurrente

Chap. Suites ·  $u_{n+1} = f(u_n)$ , récurrence, signe de  $u_{n+1} - u_n$

## ATTENDUS

1. **Encadrement**  $a \leq u_n < b$  : **par récurrence** (fiche 06), en utilisant le sens de variation de  $f$  ou des calculs de différences ; la variation de  $f$  est **justifiée**.
2. **Monotonie** : calculer et **factoriser**  $u_{n+1} - u_n$ , puis conclure du signe **pour tout**  $n$  (en s'appuyant sur l'encadrement).
3. **Exploiter la monotonie** :  $(u_n)$  croissante  $\Rightarrow \forall n, u_n \geq u_0$  — l'écrire, c'est souvent la clé de la question suivante.

## MODÈLE RÉDIGÉ

$u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2+u_n}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < \sqrt{3}$ , puis que  $(u_n)$  est croissante.

Posons  $f(x) = 2 - \frac{1}{2+x}$  sur  $[1, +\infty[$  : si  $1 \leq x < x'$ , alors  $\frac{1}{2+x} > \frac{1}{2+x'}$ , donc  $f(x) < f(x')$  :  $f$  est strictement croissante.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $P(n)$  : «  $1 \leq u_n < \sqrt{3}$  ». **Initialisation.**  $u_0 = 1$  et  $1 \leq 1 < \sqrt{3}$ . **Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq u_n < \sqrt{3}$ . Par stricte croissance de  $f$  :  $f(1) \leq f(u_n) < f(\sqrt{3})$ . Or  $f(1) = \frac{5}{3} \geq 1$  et  $f(\sqrt{3}) = 2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3}$ . Donc  $1 \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ . **Conclusion.** Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < \sqrt{3}.$$

**Monotonie.**  $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n) - 1}{2 + u_n} = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} > 0$ , car  $0 < u_n < \sqrt{3}$  donne  $u_n^2 < 3$  et  $2 + u_n > 0$ . Donc  $(u_n)$  est strictement croissante.  $\square$

Source : Test sur les suites (BelBachir), exercice 1

## FAUTE SANCTIONNÉE

Déduire la monotonie de  $(u_n)$  de celle de  $f$  (une  $f$  croissante ne rend pas  $(u_n)$  croissante) ; conclure le signe de  $u_{n+1} - u_n$  sans invoquer l'encadrement ; vérifier la monotonie sur les premiers termes seulement.

## 14 Suites arithmétiques, géométriques & suite auxiliaire

Chap. Suites ·  $v_{n+1} = q v_n$ , terme général, sommes

### ATTENDUS

- Géométrie** : montrer que  $\forall n, v_{n+1} = q v_n$  avec  $q$  indépendant de  $n$  ; **arithmétique** :  $\forall n, w_{n+1} - w_n = r$  constant. Préciser **raison et premier terme**.
- Terme général** :  $v_n = v_p q^{n-p}$  ;  $w_n = w_p + (n-p)r$  (attention au premier indice).
- Retour à  $(u_n)$**  : isoler  $u_n$  en **justifiant** chaque division (dénominateur non nul).
- Sommes** : nombre de termes de  $v_p + \dots + v_n = n - p + 1$  ;  $\sum_{k=p}^n v_k = v_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$  ( $q \neq 1$ ) ;  
arithmétique :  $\frac{(\text{nb de termes}) \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$ .

### MODÈLES RÉDIGÉS

$u_0 = 3, u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$  (avec  $2 < u_n < 4$ ) et  $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique, exprimer  $v_n, u_n$  et  $S_n = v_0 + \dots + v_{n-1}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $u_{n+1} - 4 = \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}$  et  $u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}$ , d'où  $v_{n+1} = \frac{4(u_n - 4)}{6(u_n - 2)} = \frac{2}{3} v_n$ .

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{2}{3}$  et de premier terme  $v_0 = \frac{3-4}{3-2} = -1$  :  $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Retour à  $u_n$ .  $v_n(u_n - 2) = u_n - 4$  donne  $u_n(1 - v_n) = 4 - 2v_n$  ; or  $v_n < 0$ , donc  $1 - v_n \neq 0$  et

$$u_n = \frac{4 - 2v_n}{1 - v_n} = \frac{4 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

Somme ( $n$  termes) :  $S_n = v_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} = -3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ .  $\square$

$u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n; v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n, w_n = 5^n u_n.$   
 $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1} = \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n = \frac{1}{5}v_n : (v_n) \text{ géométrique, } q = \frac{1}{5}, v_0 = 1, \text{ donc } v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n.$   
 $w_{n+1} - w_n = 5^{n+1}(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n) = 5^{n+1}v_n = 5 : (w_n) \text{ arithmétique, } r = 5, w_0 = 0, \text{ donc } w_n = 5n$   
 et  $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}.$  □

Source : Test suites (BelBachir), ex. 2 · Examen national 2006 (rattrapage)

## FAUTE SANCTIONNÉE

«Prouver» le caractère géométrique en calculant  $\frac{v_1}{v_0}$  et  $\frac{v_2}{v_1}$  seulement; écrire  $v_n = v_0 q^n$  quand la suite commence à  $n = 1$ ; diviser par  $1 - v_n$  sans justifier qu'il est non nul; erreur sur le **nombre de termes** d'une somme.

## 15 Majoration géométrique d'un écart

Chap. Suites ·  $|u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell| \Rightarrow |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$

## ATTENDUS

- 1. Inégalité d'un rang au suivant** : exprimer  $\ell - u_{n+1}$  en fonction de  $\ell - u_n$ , puis **majorer le coefficient** à l'aide de l'encadrement (et/ou de la monotonie) déjà établi.
- 2. Itération** : la déduction  $0 \leq e_n \leq k^n e_0$  se fait **par récurrence** — ou en multipliant les inégalités de 0 à  $n - 1$ , termes **positifs**, ce qu'il faut dire.
- 3. Préparation à la Terminale** : on y conclura  $\lim u_n = \ell$  (car  $0 < k < 1$ ); en 1ère, on s'arrête à l'inégalité, **rigoureusement établie**.

## MODÈLE RÉDIGÉ

Même suite qu'en 14 ( $u_0 = 3, u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2}, 2 < u_n < 4, (u_n) \text{ croissante}$ ). Montrer que  $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ , puis que  $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$ . Comme  $(u_n)$  est croissante,  $u_n \geq u_0 = 3$ , donc  $u_n + 2 \geq 5$

et  $0 < \frac{4}{u_n + 2} \leq \frac{4}{5}$ . Comme  $4 - u_n > 0$  :  $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ .

Notons  $P(n)$  : « $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ».  $P(0)$  :  $4 - u_0 = 1 \leq 1$ . Si  $P(n)$  est vraie pour un  $n$  fixé, alors  $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \frac{4}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ . Par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ . □

Source : Test sur les suites (BelBachir), exercice 2

## FAUTE SANCTIONNÉE

---

Majorer  $\frac{4}{u_n+2}$  par  $\frac{4}{5}$  en utilisant seulement  $u_n > 2$  (qui ne donne que  $< 1$ ) ; multiplier des inégalités sans vérifier la **positivité** des termes ; oublier le facteur  $e_0 = |u_0 - \ell|$ .

**Grille d'auto-contrôle avant de rendre une copie.** (1) Mes variables sont-elles introduites ? (2) Ai-je annoncé le raisonnement ? (3) Chaque «  $\Leftrightarrow$  » est-il vraiment réversible ? (4) Mes hypothèses (signe, domaine, ensemble de départ) sont-elles vérifiées *avant* d'être utilisées ? (5) Chaque question se termine-t-elle par une phrase-réponse ?