



Chapitre 2

Ensembles & Applications

Vocabulaire ensembliste, opérations, produit cartésien et applications : injections, surjections, bijections.

Première année Bac — Sciences Mathématiques | vers la CPGE

Prof : R. Abed

Plan du chapitre

Chapitre 2 — Ensembles & Applications	1	Injection, surjection, bijection	11
Introduction, motivation et objectifs	3	Bijection réciproque	12
Place dans le programme et objectifs pédagogiques	3	Propriétés des images directes et réci- proques	13
Le langage des ensembles	3	Fiche de révision — l’essentiel en un coup d’œil	14
Ensemble, élément, appartenance	3	QCM d’auto-évaluation — 21 questions	15
Les ensembles de nombres usuels	4	Niveau ★☆☆☆ / ★★☆☆ — Moyen (question 1 à 7)	15
Inclusion et égalité	4	Niveau ★★☆☆ / ★★★☆ — Bon (question 8 à 14)	15
L’ensemble vide	5	Niveau ★★★★★ — Difficile (questions 15 à 21)	16
L’ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$	5	Corrigé du QCM	16
Décrire un ensemble : extension et compréhension	6	Exercices d’application corrigés	18
Opérations sur les ensembles	6	Problèmes de synthèse	20
Complémentaire	6	Compléments : histoire, applications, ou- verture	22
Intersection et réunion	7	Un peu d’histoire	22
Différence et différence symétrique	7	Applications concrètes	22
Règles de calcul	8	Carte mentale du chapitre	22
Produit cartésien	8	Glossaire des notations	22
Applications	9	Auto-évaluation	23
Définition, image, antécédent	9	Pour aller plus loin (perspective CPGE)	23
Image directe, image réciproque	10		
Composition	11		

Introduction, motivation et objectifs

« Personne ne pourra nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous » (David Hilbert). À la fin du XIX^e siècle, Georg CANTOR fonde la théorie des ensembles : un langage unique, simple et universel, capable de décrire tous les objets mathématiques — nombres, points, fonctions, figures. Ce langage est aujourd'hui la fondation sur laquelle repose l'ensemble des mathématiques modernes. Ce chapitre en pose les bases et introduit la notion centrale d'**application**, qui relie deux ensembles et prépare l'étude des fonctions, des suites et des structures algébriques.

Remarque — Le mot du chapitre

Un ensemble bien défini ne se discute pas : un objet lui appartient, ou ne lui appartient pas. Toute la rigueur mathématique tient dans ce *tiers exclu* appliqué à l'appartenance.

1. Place dans le programme et objectifs pédagogiques

Le vocabulaire des ensembles et des applications irrigue tout le programme de Sciences Mathématiques : étude des fonctions (image, antécédent, bijection réciproque), dénombrement et probabilités (parties d'un ensemble, produit cartésien), arithmétique et structures algébriques (lois, morphismes). Le maîtriser tôt, c'est se donner un langage sûr pour tout le reste de l'année.

À retenir — À la fin de ce chapitre, l'élève saura...

- manier le vocabulaire ensembliste : **appartenance** ($\in$), **inclusion** ($\subset$), **égalité**, **ensemble vide** ($\emptyset$) et **ensemble des parties** $\mathcal{P}(E)$;
- calculer avec les **opérations** $\overline{A}$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$, Δ , et **démontrer une égalité d'ensembles** par double inclusion ou par équivalences;
- décrire un ensemble **en extension** et **en compréhension**, et manipuler le **produit cartésien** $E \times F$;
- comprendre la notion d'**application**, d'**image** et d'**antécédent**, d'**image directe** $f(A)$ et d'**image réciproque** $f^{-1}(B)$;
- déterminer une **composée** $g \circ f$;
- reconnaître et **démontrer** qu'une application est **injective**, **surjective** ou **bijective**, et déterminer une **bijection réciproque**.

Rappel de cours

On suppose connus : les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et les **intervalles** de $\mathbb{R}$; la résolution des **équations et inéquations** du premier et du second degré (discriminant, forme canonique); le calcul sur les **inégalités**, la **valeur absolue** et les **racines carrées**; les variations des fonctions de référence ($x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$). Aucune connaissance préalable de théorie des ensembles n'est requise.

Le langage des ensembles

2. Ensemble, élément, appartenance

Définition — Ensemble et appartenance

Un **ensemble** est une collection d'objets distincts, appelés ses **éléments**. On décrit un ensemble en plaçant ses éléments entre **accolades** $\{ \}$; on note les ensembles par des lettres majuscules $E, F, G, \dots$

Pour un objet x et un ensemble E :

$$x \in E \text{ ("} x \text{ appartient à } E \text{"}) \quad \text{ou} \quad x \notin E \text{ ("} x \text{ n'appartient pas à } E \text{"}).$$

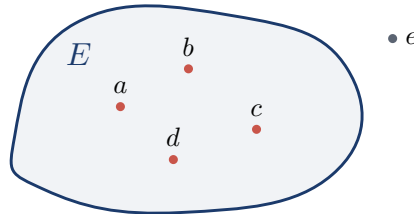


FIG. — Un ensemble E et ses éléments : $a, b, c, d \in E$ tandis que $e \notin E$.

Exemple

$E = \{a, b, c, d\}$: on a $a \in E$ et $e \notin E$. $F = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$: $\clubsuit \in F$ mais $\heartsuit \notin F$.

Remarque

Dans un ensemble, l'**ordre** et la **répétition** des éléments sont sans importance : $\{1, 2, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$. Un ensemble à un seul élément a est un **singleton**, noté $\{a\}$; ne pas confondre l'élément a et le singleton $\{a\}$ (on a $a \in \{a\}$).

3. Les ensembles de nombres usuels

On rappelle la chaîne d'inclusions fondamentale : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ensemble	Description
$\mathbb{N}$	entiers naturels : $0, 1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{Z}$	entiers relatifs : $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Q}$	rationnels : $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$
$\mathbb{R}$	nombres réels

Astuce

L'étoile signifie «privé de 0» : $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{R}^*$. Les exposants $+/-$ donnent le signe : $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$, et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

4. Inclusion et égalité

Définition — Inclusion

E et F étant deux ensembles, on dit que F est **inclus** dans E (ou que F est une **partie** de E) lorsque tout élément de F est aussi élément de E . On note $F \subset E$:

$$F \subset E \iff (\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E).$$

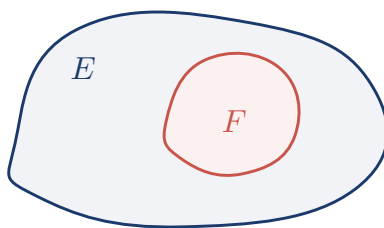


FIG. — $F \subset E$: tout élément de F est élément de E .

Propriété — Propriétés de l'inclusion

Pour tous ensembles A, B, C : $A \subset A$ (réflexivité); si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$ (transitivité).

Définition — Égalité de deux ensembles

E et F sont **égaux** ($E = F$) lorsqu'ils ont exactement les mêmes éléments :

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E) \iff (\forall x, x \in E \iff x \in F).$$

Méthode — Montrer une égalité d'ensembles $E = F$

Méthode 1 — double inclusion. On montre $E \subset F$ (soit $x \in E$, ..., donc $x \in F$), puis $F \subset E$.

Méthode 2 — équivalences. On écrit une chaîne $x \in E \iff \dots \iff x \in F$.

5. L'ensemble vide

Définition — Ensemble vide

Il existe un unique ensemble ne contenant **aucun** élément : **l'ensemble vide**, noté $\emptyset$ (ou $\{\}$).

Théorème

L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble : pour tout ensemble E , $\emptyset \subset E$.

Correction — Démonstration

Montrer $\emptyset \subset E$, c'est montrer $(\forall x, x \in \emptyset \Rightarrow x \in E)$. La prémisse « $x \in \emptyset$ » est *toujours fausse*; une implication à prémisse fausse est vraie. Donc $\emptyset \subset E$. ■

Piège à éviter

Ne pas confondre $\emptyset$, $\{0\}$ et $\{\emptyset\}$: $\emptyset$ n'a aucun élément; $\{0\}$ est un singleton (élément 0); $\{\emptyset\}$ est un singleton (élément $\emptyset$). En particulier $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

6. L'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$

Définition — Ensemble des parties

L'ensemble de **toutes les parties** de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Pour tout ensemble X :

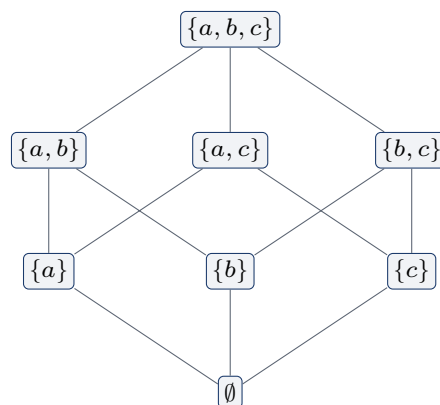
$$X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E.$$

En particulier $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple

Pour $E = \{a, b, c\}$, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ a $2^3 = 8$ éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$



Treillis de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ ordonné par $\subset$.

Propriété — Cardinal de $\mathcal{P}(E)$

Si E est fini à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments : $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$.

Piège à éviter

Distinguer $\in$ et $\subset$: $\{a\} \subset E$ (partie) mais $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$ (élément de $\mathcal{P}(E)$). Écrire « $a \subset E$ » ou « $\{a\} \in E$ » (pour $E = \{a, b\}$) est incorrect.

7. Décrire un ensemble : extension et compréhension

Définition

Décrire un ensemble **en extension**, c'est énumérer ses éléments. Le décrire **en compréhension**, c'est le caractériser par une propriété : $E = \{x \in \Omega \mid P(x)\}$.

Exemple

$\{1, 3, -2, 5\}$ est en extension. $\{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 \leq 25\}$ est en compréhension; en extension : $\{-5, -4, \dots, 4, 5\}$.

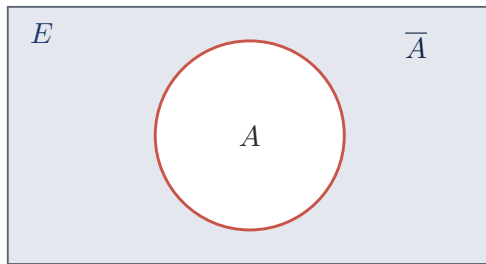
Opérations sur les ensembles

8. Complémentaire

Définition — Complémentaire

Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A ; on le note $\overline{A}$ (ou $C_E A$) :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}, \quad x \in \overline{A} \iff x \notin A.$$


 FIG. — $\overline{A}$, zone bleutée.

Remarque

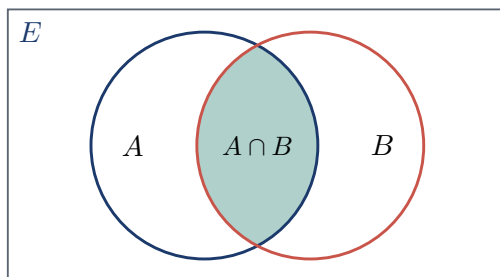
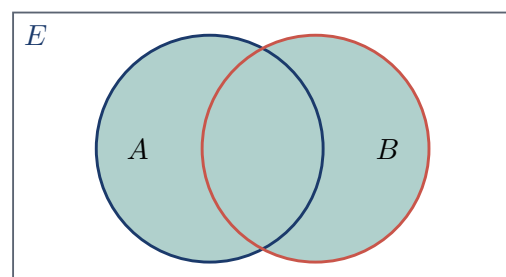
$$\overline{\overline{E}} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = E, \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

Ex. dans $\mathbb{R} : \overline{[0, +\infty[} =] - \infty, 0[$ et $\overline{\{0\}} = \mathbb{R}^*$.

9. Intersection et réunion
Définition — Intersection, réunion

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}, \quad A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Ainsi $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B).$


 $A \cap B$: partie commune.

 $A \cup B$: «ou» inclusif.

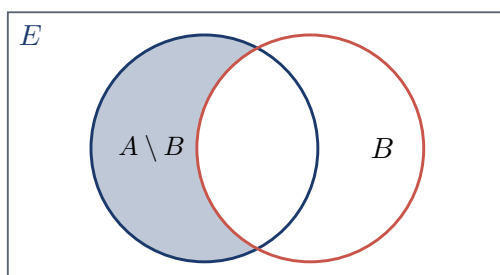
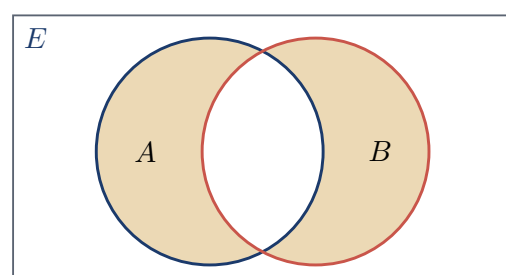
Exemple

Dans $\mathbb{R} : \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}, \quad \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}, \quad [-1, +\infty[\cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{N}^* \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset.$

10. Différence et différence symétrique
Définition — Différence, différence symétrique

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}, \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$A \Delta B$ rassemble les éléments qui sont dans A **ou bien** dans B , mais **pas dans les deux**.


 $A \setminus B$: dans A , pas dans B .

 $A \Delta B$: «ou exclusif».

Astuce

Traductions logiques à mémoriser : $\cap \leftrightarrow$ «et», $\cup \leftrightarrow$ «ou», $\overline{} \leftrightarrow$ «non». Toute preuve d'égalité d'ensembles se ramène alors à une équivalence logique sur la proposition « $x \in \dots$ ».

11. Règles de calcul

Propriété — Algèbre des parties de E

Pour toutes parties A, B, C de E :

- **idempotence** : $A \cap A = A$, $A \cup A = A$; **commutativité** : $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;
- **associativité** : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- **distributivité** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- **neutres / absorbants** : $A \cap E = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$;
- **complémentaire** : $\overline{\overline{A}} = A$, $A \cup \overline{A} = E$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
- **lois de De Morgan** : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
- **inclusion / disjonction** : $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$; $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \overline{B}$.

Correction — Démonstration — première loi de De Morgan

Pour tout $x \in E$:

$$x \in \overline{A \cap B} \iff x \notin A \cap B \iff \neg(x \in A \text{ et } x \in B) \iff (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Les deux ensembles ont les mêmes éléments, donc $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ■

Correction — Démonstration — distributivité de $\cap$ sur $\cup$

Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

D'où l'égalité. ■

Définition — Parties disjointes

A et B sont **disjointes** lorsque $A \cap B = \emptyset$. De façon équivalente : $A \subset \overline{B}$ (ou $B \subset \overline{A}$).

Produit cartésien

Définition — Couple, produit cartésien

Pour $x \in E$ et $y \in F$, le **couple** (x, y) est un objet *ordonné*. Le **produit cartésien** de E par F est

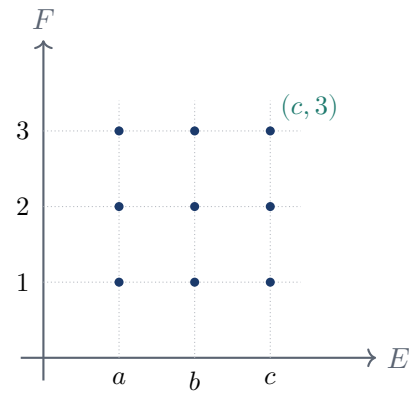
$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Piège à éviter

Un couple n'est pas une paire : l'ordre compte.

$$(x, y) = (x', y') \iff (x = x' \text{ et } y = y').$$

En général $(x, y) \neq (y, x)$, donc $E \times F \neq F \times E$.



$E \times F$ avec $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2, 3\}$.

Exemple

$E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$: $E \times F$ a $3 \times 4 = 12$ couples, dont $(a, 1)$, $(b, 3)$, $(c, 4)$, ...

Lorsque $E = F$: $E \times E = E^2$; par exemple $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Propriété — Cardinal

Si E et F sont finis, $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Applications

12. Définition, image, antécédent

Définition — Application

Une **application** f de E vers F associe à **chaque** élément x de E **un unique** élément de F , noté $f(x)$. On écrit

$$f : E \longrightarrow F, \quad x \longmapsto f(x).$$

E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée.

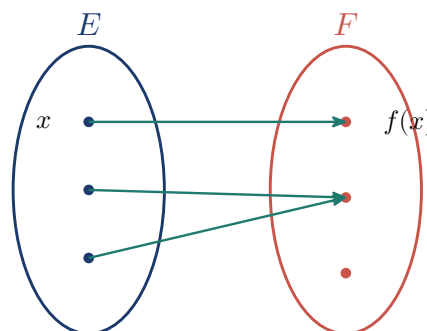


FIG. — Application : de chaque point de E part exactement une flèche.

Piège à éviter — Deux conditions à vérifier

f est une application ssi (i) tout $x \in E$ a une image (*existence*) et (ii) cette image est unique (*unicité*). Si l'une échoue, ce n'est pas une application.

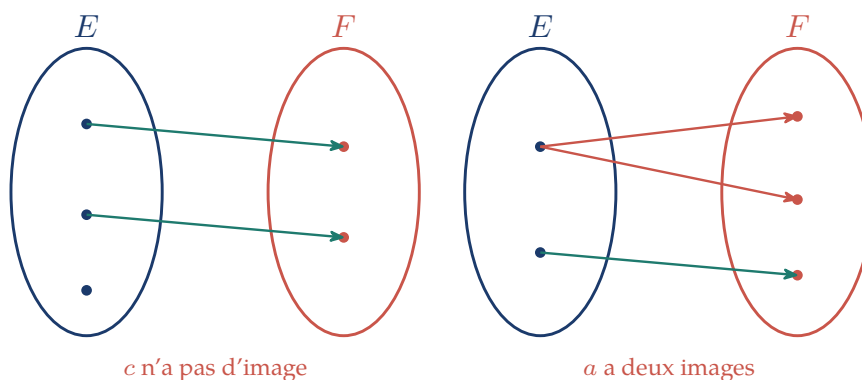


FIG. — Deux situations interdites : un élément sans image (gauche), un élément à deux images (droite).

Exemple

$x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **est** une application. $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **n'en est pas une** (0 sans image) ; de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, **oui**. $x \mapsto \sqrt{x-1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **non** ($x < 1$) ; de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, **oui**.

Remarque — Fonction ou application ?

Une **fonction** peut n'être définie que sur une partie de son ensemble de départ (son domaine D_f) ; une **application** est définie *partout* sur E ($D_f = E$). Toute application est une fonction ; la réciproque est fausse.

Définition — Image, antécédent

Si $y = f(x)$: y est **l'image** de x (unique) et x est **un antécédent** de y (il peut y en avoir 0, 1 ou plusieurs).

Exemple

$f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(2) = f(-2) = 4$: l'image de 2 est 4 ; l'élément 4 a **deux** antécédents ± 2 ; l'élément -1 n'a **aucun** antécédent.

Astuce

Image de x : calcul direct $f(x)$. **Antécédents** de y : on *résout* l'équation $f(x) = y$; leur nombre est le nombre de solutions.

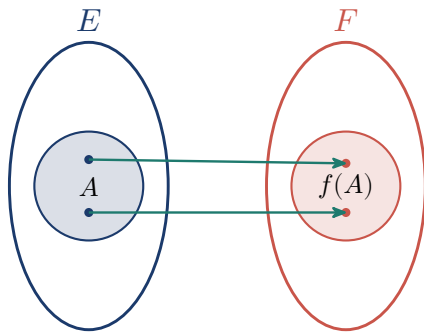
13. Image directe, image réciproque

Définition — Image directe et réciproque

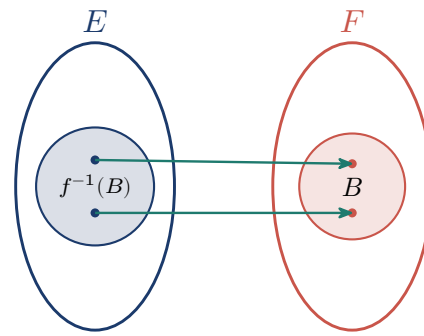
Pour $A \subset E$ et $B \subset F$:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F, \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Ainsi $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$ et $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.



$f(A)$: images des éléments de A .



$f^{-1}(B)$: antécédents des éléments de B .

Piège à éviter

La notation $f^{-1}(B)$ a un sens **pour toute** application f : c'est un *ensemble* d'antécédents. Elle ne suppose pas f bijective et ne doit pas être confondue avec l'éventuelle application réciproque f^{-1} .

14. Composition

Définition — Composée

Pour $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, la **composée** $g \circ f : E \rightarrow G$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in E$.

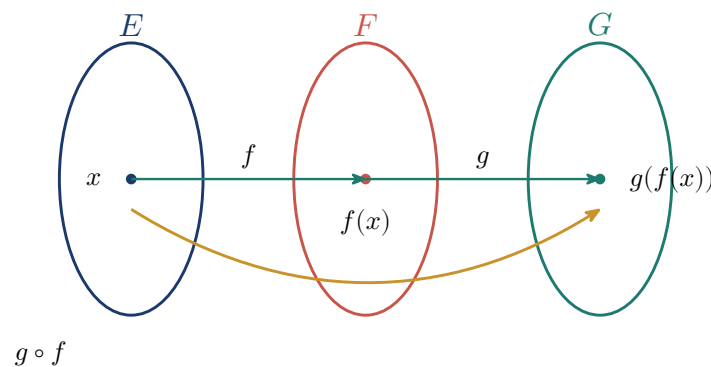


FIG. — $g \circ f$: on applique d'abord f , puis g .

Piège à éviter

L'ordre compte : dans $g \circ f$, f agit **en premier**. En général $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple

$f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$: $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$ et $(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$. Comme $(g \circ f)(1) = 3 \neq 9 = (f \circ g)(1)$, on a $g \circ f \neq f \circ g$.

Propriété — Associativité

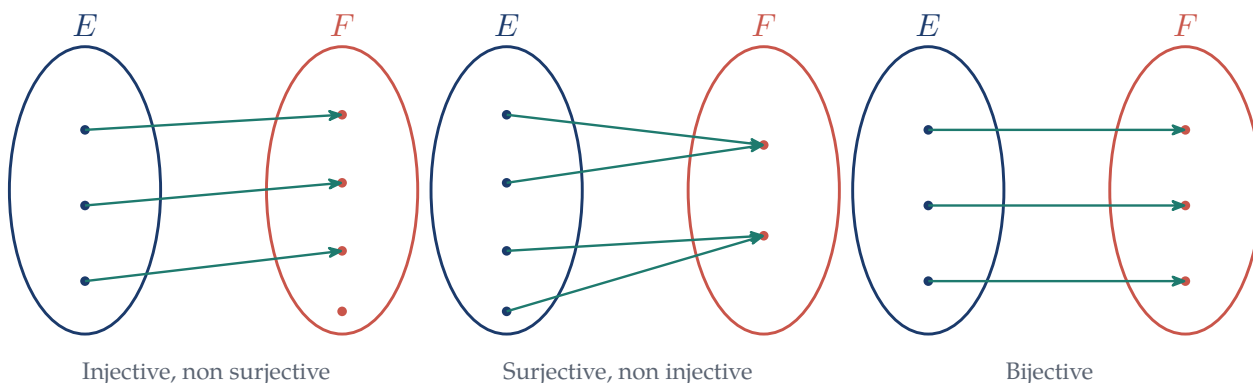
Pour $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow H$: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, noté $h \circ g \circ f$.

15. Injection, surjection, bijection

Définition — Injection, surjection, bijection

Soit $f : E \rightarrow F$.

- f est **injective** si $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ (tout élément de F a *au plus un* antécédent);
- f est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$ (tout élément de F a *au moins un* antécédent), i.e. $f(E) = F$;
- f est **bijjective** si elle est injective *et* surjective (tout élément de F a *exactement un* antécédent).



Propriété — Critère pratique d'injectivité

f est injective $\iff (\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ (contraposée).

Méthode — Montrer inj / surj / bij

Injective : partir de $f(x) = f(x')$ et prouver $x = x'$. (Contre-injectivité : exhiber $x \neq x'$ avec $f(x) = f(x')$.)

Surjective : se donner $y \in F$ quelconque et résoudre $f(x) = y$ en trouvant *au moins un* $x \in E$.

Bijjective : montrer que $\forall y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a une *unique* solution $x \in E$ (ou : injective + surjective).

Exemple

$x \mapsto x^2$: de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ni injective ($f(-1) = f(1)$) ni surjective (-1 sans antécédent); de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, **bijjective**. $x \mapsto \sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$ est surjective mais non injective.

16. Bijection réciproque

Théorème — Bijection réciproque

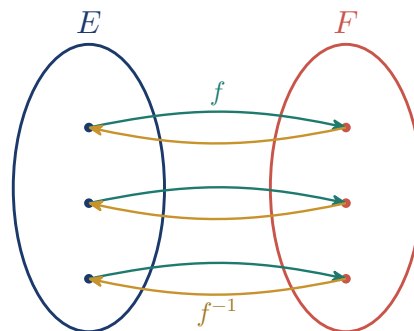
Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, il existe une unique application $f^{-1} : F \rightarrow E$, la **bijection réciproque**, telle que

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Elle vérifie $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$; de plus f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Méthode — Déterminer f^{-1}

Une fois $f : E \rightarrow F$ reconnue bijective, on résout $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$: l'unique solution s'écrit $x = f^{-1}(y)$.



f^{-1} « renverse » les flèches.

Propriété — Composition et propriétés

Pour $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$:

- si f, g injectives, alors $g \circ f$ injective ; si f, g surjectives, alors $g \circ f$ surjective ;
- si f, g bijectives, alors $g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Correction — Démonstration — $g \circ f$ injective et formule de la réciproque

Injectivité. Si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$; g injective donne $f(x) = f(x')$, puis f injective donne $x = x'$.

Formule. Posons $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. Par associativité, $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F = \text{Id}_G$ et de même $h \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$. Donc $g \circ f$ est bijective de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

17. Propriétés des images directes et réciproques

Propriété

Soit $f : E \rightarrow F$, $A, B \subset E$ et $B', B'' \subset F$.

- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$; $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- $f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$; $f^{-1}(B' \cap B'') = f^{-1}(B') \cap f^{-1}(B'')$; $f^{-1}(\overline{B'}) = \overline{f^{-1}(B')}$.

Piège à éviter

L'image directe ne conserve pas l'intersection en général : seulement $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Contre-exemple : $f : x \mapsto x^2$, $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}^-$: $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ mais $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}^+$. L'égalité a lieu dès que f est injective.

Fiche de révision — l'essentiel en un coup d'œil

À retenir — Vocabulaire

$x \in E, x \notin E; F \subset E \iff (\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E);$
 $E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E);$
 $\emptyset \subset E; X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E;$
 $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n.$

À retenir — Application $f : E \rightarrow F$

image $y = f(x)$ (unique); antécédent : $f(x) = y$ (résoudre).
 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}; f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}.$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (d'abord f).

À retenir — Opérations ($A, B \subset E$)

$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}; A \cap B$ («et»); $A \cup B$ («ou»);
 $A \setminus B = A \cap \bar{B}; A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$
De Morgan : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$
Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

À retenir — Inj / Surj / Bij

Inj : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (au plus 1 antéc.).
Surj : $\forall y \in F, \exists x, f(x) = y$, i.e. $f(E) = F.$
Bij : inj + surj (exactement 1 antéc.).
 Alors $f^{-1} : F \rightarrow E, f^{-1} \circ f = \text{Id}_E, f \circ f^{-1} = \text{Id}_F,$
 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$

À retenir — Produit cartésien

$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\};$
 $(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y';$
 $\text{card}(E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F.$

Boîte à outils — Réflexes d'examen

- Égalité d'ensembles $\rightarrow$ double inclusion.
- Injectivité $\rightarrow$ partir de $f(x) = f(x')$.
- Surjectivité $\rightarrow$ résoudre $f(x) = y, y$ donné.
- Forme canonique pour le second degré.

$f : E \rightarrow F$	Injective	Surjective	Bijective
nombre d'antécédents de tout $y \in F$	au plus 1	au moins 1	exactement 1

QCM d'auto-évaluation — 21 questions

Une seule proposition est correcte par question. Les corrigés justifiés figurent à la fin de cette section.

18. Niveau ★☆☆☆ / ★★☆☆ — Moyen (questions 1 à 7)

1. Laquelle de ces assertions est **vraie** ?

- (A) $\{a\} \in \{a, b\}$ (B) $a \subset \{a, b\}$ (C) $\{a\} \subset \{a, b\}$ (D) $\{a, b\} \in \{a, b\}$

2. Si $\text{card}(E) = 4$, alors $\text{card}(\mathcal{P}(E))$ vaut :

- (A) 8 (B) 16 (C) 4 (D) 12

3. Pour toutes parties A, B de E , $\overline{A \cup B}$ est égal à :

- (A) $\overline{A} \cup \overline{B}$ (B) $\overline{A} \cap \overline{B}$ (C) $A \cap B$ (D) $\overline{A} \cup B$

4. Dans $\mathbb{R}$, $[-2, 3] \cap [0, 5]$ vaut :

- (A) $[0, 3]$ (B) $[-2, 5]$ (C) $[0, 5]$ (D) $\emptyset$

5. Pour $A, B \subset E$, $A \setminus B$ est égal à :

- (A) $A \cap B$ (B) $A \cup \overline{B}$ (C) $A \cap \overline{B}$ (D) $\overline{A} \cap B$

6. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, le nombre d'antécédents de 9 est :

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. Si $\text{card}(E) = 3$ et $\text{card}(F) = 5$, alors $\text{card}(E \times F)$ vaut :

- (A) 8 (B) 15 (C) 35 (D) 2

19. Niveau ★★☆☆ / ★★☆☆ — Bon (questions 8 à 14)

8. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 1$ est :

- (A) injective non surjective (B) surjective non injective (C) bijective (D) ni l'une ni l'autre

9. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $f^{-1}([1, 4])$ vaut :

- (A) $[1, 2]$ (B) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ (C) $[-2, 2]$ (D) $[1, 4]$

10. Pour $A \subset E$, $A \Delta A$ vaut :

- (A) A (B) $\emptyset$ (C) E (D) $\overline{A}$

11. La composée de deux applications **injectives** est :

- (A) toujours injective (B) toujours surjective (C) pas toujours une application (D) toujours bijective

12. L'application $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$ est :

- (A) injective seulement (B) surjective seulement (C) bijective (D) ni injective ni surjective

13. Si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour toutes parties A, B de E , alors f est nécessairement :

- (A) surjective (B) injective (C) constante (D) bijective

14. Le nombre de parties à deux éléments de $\{a, b, c, d\}$ est :

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

20. Niveau ★★★★★ — Difficile (questions 15 à 21)

15. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$, l'image $f(\mathbb{R})$ vaut :

- (A) $\mathbb{R}$ (B) $[-1, 1]$ (C) $[0, 1]$ (D) $] -1, 1[$

16. Le cardinal de $E = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 \leq 25\}$ est :

- (A) 5 (B) 10 (C) 11 (D) 25

17. Pour $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, si $g \circ f$ est **injective**, on peut affirmer que :

- (A) f est injective (B) g est injective (C) g est surjective (D) f est surjective

18. Pour $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, si $g \circ f$ est **surjective**, on peut affirmer que :

- (A) f est surjective (B) g est surjective (C) f est injective (D) g est injective

19. Le nombre d'applications d'un ensemble à 3 éléments vers un ensemble à 2 éléments est :

- (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 5

20. Le nombre d'**injections** de $\{1, 2\}$ vers $\{a, b, c\}$ est :

- (A) 6 (B) 9 (C) 3 (D) 8

21. Pour des parties A, B, C de E , l'implication $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow ?$ permet de conclure :

- (A) $B = C$ (B) $B = \overline{C}$ (C) $A = \emptyset$ (D) aucune conclusion

21. Corrigé du QCM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
C	B	B	A	C	C	B	C	B	B	A	C	B	B	B	C	A	B	B	A	A

Correction — justifications

- (C) $\{a\} \subset \{a, b\}$ car $a \in \{a, b\}$; en revanche $\{a\} \notin \{a, b\}$ (les éléments sont a, b , pas $\{a\}$).
- (B) $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^4 = 16$.
- (B) Loi de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Le distracteur (A) confond avec $\overline{A \cap B}$.
- (A) $[-2, 3] \cap [0, 5] = [0, 3]$ (bornes : le plus grand des minimums, le plus petit des maximums).
- (C) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ par définition.
- (C) $x^2 = 9 \iff x = \pm 3$: deux antécédents.
- (B) $\text{card}(E \times F) = 3 \times 5 = 15$. (C) 35 compte $\text{card}(\mathcal{P})$ -style, faux.
- (C) $x \mapsto 2x - 1$ est affine non constante : bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de réciproque $y \mapsto \frac{y+1}{2}$.
- (B) $x^2 \in [1, 4] \iff 1 \leq |x| \leq 2 \iff x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$. Le distracteur (A) oublie les x négatifs.
- (B) $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset$.
- (A) Si f, g injectives, $g \circ f$ l'est; rien n'assure la surjectivité.
- (C) Sur $\mathbb{R}^- =] -\infty, 0]$, $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante donc injective, et atteint tout $\mathbb{R}^+$: bijective.
- (B) La conservation de l'intersection pour toutes parties caractérise l'injectivité.
- (B) Nombre de parties à 2 éléments $= \binom{4}{2} = 6$.

15. (B) L'étude de $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ (dérivée nulle en ± 1 , valeurs ± 1) donne $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
16. (C) $k^2 \leq 25 \iff -5 \leq k \leq 5 : 11$ entiers.
17. (A) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective (mais pas forcément g).
18. (B) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective (mais pas forcément f).
19. (B) Nombre d'applications d'un ensemble à 3 éléments vers un ensemble à 2 : $2^3 = 8$.
20. (A) Injections $\{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\} : 3 \times 2 = 6$.
21. (A) Δ est régulière : $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$ (composer par $A \Delta (\cdot)$, d'inverse elle-même).

Exercices d'application corrigés

Exercice 1 — Ensemble des parties

☆☆☆ Bac SM

Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour 1. $E = \{a\}$ 2. $E = \{a, b, c\}$ 3. $E = \emptyset$.

(6 pts)

Correction

1. $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$ ($2^1 = 2$). 2. $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ ($2^3 = 8$). 3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$: un singleton ($2^0 = 1$), donc $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$.

Exercice 2 — Caractérisation de l'inclusion

☆☆☆ Classique

Soient A, B deux parties de E . Montrer que $A \subset B \iff A \cup B = B$.

(4 pts)

Correction

($\Rightarrow$) Si $A \subset B$: on a toujours $B \subset A \cup B$; et si $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ (donc $x \in B$) ou $x \in B$, d'où $A \cup B \subset B$. Ainsi $A \cup B = B$.

($\Leftarrow$) Si $A \cup B = B$: comme $A \subset A \cup B = B$, on a $A \subset B$. ■

Exercice 3 — Une égalité avec la différence

☆☆☆ Bac SM

Soient A, B, C des parties de E . Établir $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(4 pts)

Correction

Pour tout $x \in E$, avec $A \setminus X = A \cap \overline{X}$ et De Morgan :

$$x \in A \setminus (B \cap C) \iff x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin C) \iff x \in A \setminus B \text{ ou } x \in A \setminus C.$$

D'où l'égalité. ■

Exercice 4 — Ensemble décrit en compréhension

☆☆☆ CPGE

On pose $E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $E =]0, 1]$.

(5 pts)

Correction

Posons $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

• $E \subset]0, 1]$: pour tout x , $1+x^2 \geq 1$ donc $0 < g(x) \leq 1$.

• $]0, 1] \subset E$: soit $y \in]0, 1]$; $g(x) = y \iff 1+x^2 = \frac{1}{y^2} \iff x^2 = \frac{1-y^2}{y^2} \geq 0$ (car $0 < y \leq 1$), donc $x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ convient. Ainsi $y \in E$.

Par double inclusion, $E =]0, 1]$. ■

Exercice 5 — Antécédents

☆☆☆ Bac SM

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{-2\})$. (4 pts)

Correction

On résout $x^2 - 2x = k$, soit $x^2 - 2x - k = 0$ ($\Delta' = 1 + k$).

$f^{-1}(\{0\}) = \{0, 2\}$; $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\}$ (racine double); $f^{-1}(\{1\}) = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$;
 $f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$ ($\Delta' = -1 < 0$).

Exercice 6 — Bijection et réciproque

★★★☆☆ CPGE

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$, $x \mapsto x^2 - 2x + 3$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} . (6 pts)

Correction

Forme canonique : $f(x) = (x - 1)^2 + 2$.

Injective : $f(x) = f(x') \Rightarrow (x - 1)^2 = (x' - 1)^2 \Rightarrow |x - 1| = |x' - 1|$; or $x, x' \geq 1$ donc $x - 1 = x' - 1$, d'où $x = x'$.

Surjective : pour $y \geq 2$, $(x - 1)^2 = y - 2 \geq 0$ donne $x = 1 + \sqrt{y - 2} \geq 1$, qui vérifie $f(x) = y$.
 Donc f est bijective et $f^{-1} : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$, $y \mapsto 1 + \sqrt{y - 2}$. ■

Exercice 7 — Propriétés de la différence symétrique

★★★☆☆ Classique

Soient A, B des parties de E . Montrer 1. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ 2. $A \Delta E = \bar{A}$. (5 pts)

Correction

1. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$; en développant : $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$ (les termes $A \cap \bar{A}$ et $B \cap \bar{B}$ sont vides).

2. $A \Delta E = (A \setminus E) \cup (E \setminus A) = \emptyset \cup \bar{A} = \bar{A}$. ■

Exercice 8 — Équations dans $\mathcal{P}(E)$

★★★★ Concours

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: ($\mathcal{E}_1$) $A \cup X = B$ et ($\mathcal{E}_2$) $A \cap X = B$. (6 pts)

Correction

($\mathcal{E}_1$) : une solution impose $A \subset B$ (car $A \subset A \cup X = B$). Si $A \subset B$, alors X convient $\Leftrightarrow (B \setminus A) \subset X \subset B$. Donc $\mathcal{S}_1 = \{X \mid B \setminus A \subset X \subset B\}$ si $A \subset B$, sinon $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

($\mathcal{E}_2$) : une solution impose $B \subset A$ (car $B = A \cap X \subset A$). Si $B \subset A$, alors X convient $\Leftrightarrow B \subset X \subset \bar{A} \cup B$. Donc $\mathcal{S}_2 = \{X \mid B \subset X \subset \bar{A} \cup B\}$ si $B \subset A$, sinon $\mathcal{S}_2 = \emptyset$. ■

Problèmes de synthèse

Exercice 9 — Une fonction homographique bornée

★★★★ Type Bac

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1, 1]$.
2. L'application f est-elle injective sur $\mathbb{R}$? (justifier).
3. On note $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ la restriction de f . Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1} .

(8 pts)

Correction

1. Pour tout $x, (x-1)^2 \geq 0$ et $(x+1)^2 \geq 0$ donnent $2x \leq x^2 + 1$ et $-2x \leq x^2 + 1$, soit $|2x| \leq x^2 + 1$. Comme $x^2 + 1 > 0$, $|f(x)| = \frac{|2x|}{x^2 + 1} \leq 1$, donc $f(x) \in [-1, 1]$.

2. Non : $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$ avec $2 \neq \frac{1}{2}$. f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

3. Sur $[-1, 1]$, $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \geq 0$: g est strictement croissante, donc injective. De plus $g(-1) = -1$ et $g(1) = 1$: par continuité et stricte croissance, g atteint exactement $[-1, 1]$, donc g est surjective sur $[-1, 1]$. Ainsi g est **bijective**.

Réciproque. Pour $y \in [-1, 1]$, on résout $\frac{2x}{x^2+1} = y$ avec $x \in [-1, 1]$. Si $y = 0$, $x = 0$. Si $y \neq 0$: $yx^2 - 2x + y = 0$, $\Delta = 4(1-y^2) \geq 0$, de racines $\frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$; seule $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ appartient à $[-1, 1]$. Donc

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

■

Exercice 10 — Images directes, réciproques et injectivité

★★★★ CPGE

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer :

1. pour toute partie $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$;
2. pour toute partie $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$;
3. f est injective $\iff$ pour toutes parties A, B de E , $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(9 pts)

Correction

1. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$: il existe $x \in f^{-1}(B)$ avec $y = f(x)$; or $x \in f^{-1}(B)$ signifie $f(x) \in B$, donc $y \in B$.

2. Soit $x \in A$: alors $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$ par définition de l'image réciproque.

3. ($\Leftarrow$) Supposons la propriété vraie pour toutes parties. Soient $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$. Appliquons-la à $A = \{x\}$, $B = \{x'\}$: $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \neq \emptyset$, donc $f(A \cap B) \neq \emptyset$, ce qui force $A \cap B = \{x\} \cap \{x'\} \neq \emptyset$, d'où $x = x'$. Donc f est injective.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. L'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est toujours vraie. Récipro-

quement, soit $y \in f(A) \cap f(B)$: il existe $a \in A$ et $b \in B$ avec $y = f(a) = f(b)$; f injective donne $a = b \in A \cap B$, donc $y = f(a) \in f(A \cap B)$. D'où l'égalité. ■

Compléments : histoire, applications, ouverture

22. Un peu d'histoire

Remarque — Aux origines de la théorie des ensembles

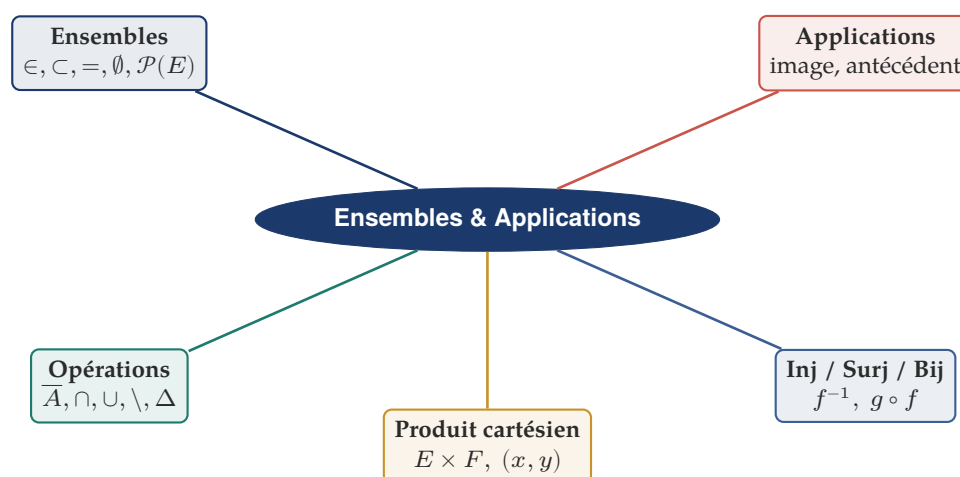
La théorie des ensembles naît des travaux de **Georg Cantor** (1845–1918) sur *l'infini* : il découvre que tous les infinis ne se valent pas ($\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas le même « cardinal »). **Richard Dedekind** formalise la notion d'application et de nombre. Le début du xx^e siècle révèle des *paradoxes* (Russell : « l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas ») qui conduisent **Zermelo** et **Fraenkel** à **axiomatiser** la théorie (système ZF, 1908–1922), fondation encore utilisée aujourd'hui.

23. Applications concrètes

Boîte à outils — Où les ensembles et applications interviennent

- **Bases de données & SQL** : les requêtes UNION, INTERSECT, EXCEPT sont exactement $\cup$, $\cap$, $\setminus$.
- **Informatique / logique** : les opérations booléennes (ET, OU, NON) et les lois de De Morgan structurent circuits et conditions.
- **Probabilités** : un événement est une partie de l'univers Ω ; $\overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$ traduisent « contraire », « et », « ou ».
- **Cryptographie & codage** : une fonction de chiffrement doit être **bijective** pour être déchiffable (existence de f^{-1}).

24. Carte mentale du chapitre



25. Glossaire des notations

Symbole	Signification	Symbole	Signification
$\in, \notin$	(n')appartient (pas) à	$\bar{A}, \complement_E A$	complémentaire de A
$\subset$	est inclus dans	$A \cap B, A \cup B$	intersection, réunion
$\emptyset$	ensemble vide	$A \setminus B, A \Delta B$	différence, diff. symétrique
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties	$E \times F$	produit cartésien
$\text{card}(E)$	cardinal (nb d'éléments)	$f(A), f^{-1}(B)$	image directe, réciproque
$f : E \rightarrow F$	application	$g \circ f, f^{-1}$	composée, réciproque

26. Auto-évaluation

Je suis capable de...	Oui	Pas encore
distinguer $\in$ et $\subset$, manier $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$	☐	☐
calculer $\bar{A}, \cap, \cup, \setminus, \Delta$ et démontrer une égalité d'ensembles	☐	☐
décrire un ensemble en extension / compréhension, manier $E \times F$	☐	☐
déterminer image, antécédent, $f(A)$ et $f^{-1}(B)$	☐	☐
composer deux applications	☐	☐
démontrer qu'une application est injective / surjective / bijective	☐	☐
déterminer une bijection réciproque	☐	☐

27. Pour aller plus loin (perspective CPGE)

Remarque

Le chapitre se prolonge en classes préparatoires par : les **relations** (d'équivalence, d'ordre) sur un ensemble ; les **familles** et **partitions** ; la **cardinalité** des ensembles infinis (ensembles *dénombrables* comme $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$; non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$, argument diagonal de Cantor) ; et le rôle des **bijections** pour « compter » et comparer les infinis. La notion d'application y devient l'outil central de toute l'algèbre (morphisms) et de l'analyse.