



MATHÉMATIQUES

1^{ère} Baccalauréat Sciences Mathématiques

Chapitre 14 DÉNOMBREMENT

Compter intelligemment, sans tout énumérer

Notions abordées :

- Cardinal d'un ensemble fini
- p-listes (avec répétition)
- Combinaisons
- Triangle de Pascal
- Arrangements
- Permutations
- Coefficients binômiaux
- Binôme de Newton

Niveau : Première Bac Sciences Mathématiques

Année scolaire : 2025 – 2026

ñ Les questions les plus importantes de la vie ne sont pour la plupart que des problèmes de probabilité. ž

— Pierre Simon de Laplace (1749–1827)

Contents

Introduction	2
1 Cardinal d'un ensemble fini	2
1.1 Définitions fondamentales	2
1.2 Opérations sur les cardinaux	3
2 Produit cartésien et le nombre d'applications entre deux ensembles finis	4
2.1 A. Produit cartésien	5
2.2 B. Cardinal de l'ensemble des applications	6
2.3 Le Principe des Bergers	8
3 Factorielle	9
4 p-listes (Arrangements avec répétition)	9
4.1 Définition	10
4.2 Dénombrement	10
5 Arrangements (sans répétition)	11
5.1 Définition	11
5.2 Dénombrement	11
6 Permutations	12
7 Combinaisons sans répétition	13
7.1 Définition et formule	13
7.2 Valeurs remarquables	14
8 Propriétés des coefficients binômiaux	15
8.1 La propriété de symétrie	15
8.2 La formule de Pascal	15
8.3 Triangle de Pascal	16
9 Binôme de Newton	16
9.1 Formule	16
9.2 Identités remarquables issues du binôme	17
9.3 Identité remarquable $a^n - b^n$	18
10 Tableau récapitulatif Choisir la bonne formule	19
11 Exercices de synthèse	20
Fiche récapitulative	23

Introduction

Le **dénombrement** est la branche des mathématiques qui étudie la façon de **compter les éléments d'ensembles finis**, sans les énumérer un à un. Loin d'être une simple curiosité, il constitue le fondement indispensable du calcul des probabilités : avant de calculer la probabilité d'un événement, il faut savoir combien de cas favorables et combien de cas possibles existent.

Pourquoi apprendre à dénombrer ?

- Calculer des probabilités (combien de mains de poker gagnantes ?).
- Analyser des algorithmes (combien d'opérations ?).
- Résoudre des problèmes combinatoires (codes secrets, tournois sportifs).
- Démontrer des identités algébriques (binôme de Newton).

! Attention

Avertissement pédagogique. La principale difficulté du dénombrement est de *modéliser* correctement la situation : savoir si l'ordre compte, si les répétitions sont autorisées. Avant d'appliquer une formule, il faut toujours répondre à ces deux questions.

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1. Définitions fondamentales

Définition Ensemble fini et cardinal

Soit E un ensemble. On dit que E est un **ensemble fini** s'il est formé d'un nombre fini d'éléments. Ce nombre s'appelle le **cardinal** de E et se note $\text{card}(E)$ (ou $|E|$ ou $\#E$).

Définition Ensemble vide

L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$ ou $\{\}$. Par convention : $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Exemple

- $E = \{a, b, c\} \Rightarrow \text{card}(E) = 3$
- $E = \{a, b, c, d\} \Rightarrow \text{card}(E) = 4$
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \text{card}(E) = 5$

$$\bullet \quad A = \{\text{rouge, vert, bleu}\} \Rightarrow \text{card}(A) = 3$$

Intervalle d'entiers

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, on note $\llbracket p, n \rrbracket = \{p, p+1, \dots, n\}$. Alors :

1. $\text{card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = n$
2. $\text{card}(\llbracket 0, n \rrbracket) = n + 1$
3. $\text{card}(\llbracket p, n \rrbracket) = n - p + 1$

1.2. Opérations sur les cardinaux

Proposition 1 Union disjointe

Soient A et B deux ensembles finis avec $A \cap B = \emptyset$. Alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Plus généralement, si $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont deux à deux disjoints :

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_k)$$

Proposition 2 Formule d'inclusion-exclusion (deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles finis quelconques. Alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Proposition 3 Complémentaire relatif

Soient A et B deux ensembles finis avec $B \subset A$. Alors :

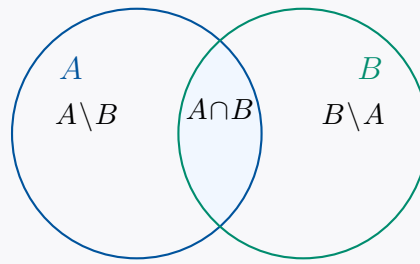
$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(B)$$

Proposition Formule d'inclusion-exclusion (trois ensembles)

Soient A, B et C trois ensembles finis. Alors :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) \\ &\quad + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Exemple *Illustration géométrique diagramme de Venn*



$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ (on soustrait l'intersection comptée deux fois)

Exercice 1

Dans une classe de 30 élèves, 18 pratiquent la natation (N), 12 pratiquent le tennis (T) et 5 pratiquent les deux. Combien d'élèves pratiquent **au moins un** de ces sports ? Combien n'en pratiquent **aucun** ?

✓ Solution

$\text{card}(N \cup T) = 18 + 12 - 5 = \mathbf{25}$ élèves pratiquent au moins un sport.
Élèves sans sport : $30 - 25 = \mathbf{5}$.

Exercice 2 Niveau avancé

Dans une entreprise de 100 personnes :

- 20 parlent russe (R), 38 parlent anglais (A), 26 parlent chinois (C),
- 9 parlent russe et anglais, 4 parlent russe et chinois, 8 parlent anglais et chinois,
- 2 parlent les trois langues.

Combien de personnes ne parlent **aucune** de ces trois langues ?

✓ Solution

Par la formule d'inclusion-exclusion pour trois ensembles :

$$\text{card}(R \cup A \cup C) = 20 + 38 + 26 - 9 - 4 - 8 + 2 = \mathbf{65}$$

Personnes ne parlant aucune langue : $100 - 65 = \boxed{35}$.

2 Produit cartésien et le nombre d'applications entre deux ensembles finis

2.1. A. Produit cartésien

Propriété

Soient A et B deux ensembles finis. Le produit cartésien $A \times B$ (ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$) est un ensemble fini, et on a :

$$\text{card}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \text{card}(\mathbf{A}) \times \text{card}(\mathbf{B})$$

Exemple

$A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$.

... ..
... ..
... ..

Exemple

$A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$.

... ..
... ..
... ..

Cas général

Pour p ensembles finis $A_1, A_2, \dots, A_p$, on a :

$$\text{card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p) = \prod_{i=1}^p \text{card}(A_i)$$

Principe multiplicatif (règle du produit)

Pour effectuer une action composée de deux étapes successives, si la première étape peut être réalisée de p manières et la deuxième de q manières **indépendamment de la première**, alors le nombre total de façons d'effectuer l'action est :

$$p \times q$$

Plus généralement, avec k étapes de $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités respectivement :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

Exemple *Principe multiplicatif*

Un restaurant propose 4 entrées, 6 plats et 3 desserts. Le nombre de menus complets

(une entrée + un plat + un dessert) est :

$$4 \times 6 \times 3 = 72 \text{ menus}$$

Exemple Codes PIN

Un code PIN à 4 chiffres (chaque chiffre de 0 à 9) admet :

$$10^4 = 10\,000 \text{ codes possibles}$$

Si les chiffres sont tous *distincts* :

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ codes}$$

2.2. B. Cardinal de l'ensemble des applications

Théorème: Nombre d'applications

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$.

L'ensemble de toutes les applications de E dans F , noté $\mathbf{F}^E$ (ou $\mathcal{F}(E, F)$), est fini et son cardinal vaut :

$$\text{card}(\mathbf{F}^E) = (\text{card}(\mathbf{F}))^{\text{card}(E)} = n^p$$

Démonstration et interprétation combinatoire : Définir une application $f : E \rightarrow F$ revient à choisir pour chacun des p éléments de l'ensemble de départ E une image parmi les n éléments de l'ensemble d'arrivée F . Il y a n choix pour le premier élément, n choix pour le deuxième, ..., et n choix pour le p -ième. Par principe multiplicatif (produit cartésien), le nombre total de choix est $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$.

Exemple

Soit $E = \{x, y\}$ et $F = \{a, b, c\}$. On a $p = 2$ et $n = 3$. Le nombre d'applications possibles de E dans F est égal à $3^2 = 9$. Ces applications sont représentées par les couples d'images $(f(x), f(y)) \in F \times F$.

Exemple

On a 12 objets et 10 tiroirs. Il y'a combien de façons pour mettre les objets dans ces tiroirs, sachant que n'importe quel tiroir, peut contenir tous les objets?

Théorème: Nombre d'applications injective

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$, avec $p \leq n$

Le nombre des applications injectives de E dans F est égal :

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1)$$

Exemple

On a 8 objets et 10 tiroirs. Il y'a combien de façons pour mettre les objets dans ces tiroirs, sachant que n'importe quel tiroir, peut contenir au plus un objet?

Théorème: Nombre d'applications bijectives

Soient E et F deux ensembles finis non vides de même cardinal. respectifs $\text{card}(E) = \text{card}(F) = n$

Le nombre des applications bijectives de E dans F est égal :

$$n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Exemple

On a 10 objets et 10 tiroirs. Il y'a combien de façons pour mettre les objets dans ces tiroirs, sachant que n'importe quel tiroir, contient exactement un objet?

C. Le Théorème de Bijection (Conservation du Cardinal)

Théorème: Principe bijectif

Soient E et F deux ensembles finis. Il existe une application $f : E \rightarrow F$ ****bijective**** si, et seulement si, ils possèdent le même nombre d'éléments :

$$\text{il existe une bijection } f : E \rightarrow F \iff \text{card}(E) = \text{card}(F)$$

Exercice APPLICATION AVANCÉE

Exercice d'analyse des applications :

Soit E un ensemble fini à n éléments. On cherche à dénombrer le nombre de couples de parties $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.

Savoir-faire mathématique : À chaque couple (A, B) vérifiant $A \subset B$, on peut associer de manière unique une application $f : E \rightarrow \{1, 2, 3\}$ définie pour tout $x \in E$

par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 2 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 3 & \text{si } x \in E \setminus B \end{cases}$$

Cette construction définit une **bijection** entre l'ensemble des couples cherchés et l'ensemble des applications $\{1, 2, 3\}^E$. D'après le théorème de bijection et le théorème 1, le nombre de couples cherché est égal au nombre d'applications, soit : 3^n .

2.3. Le Principe des Bergers

Théorème: Approche Applicative

Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ une application surjective. Si toutes les fibres (images réciproques) possèdent un nombre constant $k \in \mathbb{N}^*$ d'éléments, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \quad \text{card}(f^{-1}(\{y\})) = k$$

Alors on dispose de la relation : $\text{card}(\mathbf{E}) = \mathbf{k} \times \text{card}(\mathbf{F})$

Théorème: Approche Partition

Soit E un ensemble fini. Si E est partitionné en m sous-ensembles $A_1, A_2, \dots, A_m$ disjoints deux à deux ayant tous le même cardinal $k \in \mathbb{N}^*$:

$$E = \bigcup_{i=1}^m A_i \quad \text{avec} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\forall i \neq j) \quad \text{et} \quad \forall i, \text{card}(A_i) = k$$

Alors le cardinal global de l'ensemble s'écrit : $\text{card}(\mathbf{E}) = \mathbf{m} \times \mathbf{k}$

Exemple

On cherche à dénombrer les mots de 4 lettres formés avec les lettres de l'alphabet contenant exactement une fois la lettre 'A'. Soit E cet ensemble. On peut partitionner E en $m = 4$ sous-ensembles A_i selon la position du 'A' (1^{ère}, 2^e, 3^e ou 4^e position). Pour chaque position choisie, les 3 autres cases reçoivent n'importe laquelle des 25 autres lettres. On a donc $\text{card}(A_i) = 25^3 = 15\,625$ pour tout i . D'après le principe des bergers (forme ensembliste) : $\text{card}(E) = m \times k = 4 \times 15\,625 = 62\,500$ mots.

3 Factorielle

Définition Factorielle

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la **factorielle** de n , notée $n!$, par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Convention : $0! = 1$

Relation de récurrence

Pour tout $n \geq 1$: $n! = n \times (n-1)!$

Exemple *Calculs de factorielles*

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
10	3 628 800

! Attention

La factorielle croît **très rapidement** : $20! \approx 2,43 \times 10^{18}$. Ne jamais calculer $n!$ brutalement pour simplifier une fraction : simplifier *avant* de calculer.

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

4 p-listes (Arrangements avec répétition)

4.1. Définition

Définition p-liste (ou p-uplet)

Une **p-liste** (ou arrangement avec répétition, ou p -uplet) d'un ensemble E à n éléments est une *suite ordonnée* de p éléments de E , distincts ou non.

$$(e_1, e_2, \dots, e_p) \quad \text{où chaque } e_i \in E$$

4.2. Dénombrement

Théorème Nombre de p-listes

Le nombre de p -listes d'un ensemble à n éléments est :

$$n^p$$

$$n$$

n possibilités

$$n$$

n possibilités

$$n$$

n possibilités

$$\text{Total} = n \times n \times n = n^3 \quad (\text{pour } p = 3)$$

Exemple Tirage avec remise

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire **quatre** boules *avec remise*. Combien de tirages ordonnés sont possibles ?

$$10^4 = 10\,000$$

* Situation type Tirages avec remise

- La boule est **remise** dans l'urne après chaque tirage.
- Les répétitions sont **autorisées**.
- L'ordre **compte**.
- Formule : n^p où $n = \text{card}(E)$ et $p = \text{nombre de tirages}$.

Exercice 3

Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec l'alphabet de 26 lettres (répétitions autorisées) ?

✓ Solution

$$26^4 = 456\,976 \text{ mots.}$$

5 Arrangements (sans répétition)

5.1. Définition

Définition Arrangement

Un **arrangement à p éléments** d'un ensemble E à n éléments est une *liste ordonnée de p éléments **distincts*** choisis dans E . On impose $p \leq n$.

Exemple

Soit $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

- (x_3, x_1, x_4) est un arrangement à 3 éléments de E .
- (x_5, x_1, x_3) est un arrangement à 3 éléments de E .
- (x_3, x_3, x_1) **n'est pas** un arrangement (répétition de x_3).

5.2. Dénombrement

Théorème Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

C'est un produit de p facteurs consécutifs décroissant à partir de n .



Exemple Podium

Combien de podiums distincts (1^{er}, 2^e, 3^e) peut-on former avec 10 athlètes ?

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = \mathbf{720}$$

* Situation type Tirages sans remise (ordonnés)

- La boule n'est **pas remise** dans l'urne.
- Les répétitions sont **interdites**.
- L'ordre **compte**.

- Formule : A_n^p où $n = \text{card}(E)$ et $p = \text{nombre de tirages}$.

Exercice 4

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire **quatre** boules une à une *sans remise*. Combien de tirages ordonnés sont possibles ?

✓ Solution

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040.$$

💡 Méthode Calcul d'un arrangement

Pour calculer A_n^p :

- Écrire n , puis multiplier par les entiers décroissants.
- S'arrêter après **exactement** p facteurs.
- Exemple : $A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\,680$.

6 Permutations

Définition Permutation

Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un arrangement *utilisant tous les éléments* ($p = n$).

Exemple

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

- $(x_3, x_1, x_4, x_5, x_2)$ est une permutation de E .
- $(x_5, x_1, x_3, x_4, x_2)$ est une permutation de E .

Il y en a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ au total.



$$\text{Total} = 5! = 120$$

Théorème Nombre de permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est :

$$A_n^n = n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Exemple Anagrammes

Combien d'anagrammes du mot *CHIEN* (5 lettres distinctes) peut-on former ?

$$5! = 120 \text{ anagrammes}$$

Exercice 5

1. De combien de façons peut-on ranger 7 livres distincts sur une étagère ?
2. Parmi ces rangements, combien commencent et finissent par le même livre fixé ?

✓ Solution

1. $7! = 5\,040$ rangements.
2. On fixe 2 positions (début et fin), il reste 5 livres à placer : $5! = 120$.

7 Combinaisons sans répétition

7.1. Définition et formule

Définition Combinaison

Une **combinaison à p éléments** d'un ensemble E à n éléments est une *partie à p éléments* de E (l'ordre **ne compte pas**). Le nombre de telles combinaisons est le **coefficient binomial** C_n^p :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Arrangement vs Combinaison

	Arrangement	Combinaison
Ordre	Compte	Ne compte pas
$\{A, B, C\}$ et $\{B, A, C\}$	Différents	Identiques
Formule	A_n^p	C_n^p
Lien	$A_n^p = p! \times C_n^p$	

7.2. Valeurs remarquables

Valeurs particulières

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^{n-1} = n$$

De plus : $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

Exemple Calculs

$$C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2!} = 10 \quad C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20 \quad C_{10}^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = 210$$

* Situation type Tirages simultanés

- On tire plusieurs boules **en même temps** (ou sans remise *sans tenir compte de l'ordre*).
- Les répétitions sont **interdites**.
- L'ordre **ne compte pas**.
- Formule : C_n^p .

Exercice 6

Une urne contient 4 boules : une verte (V), une rouge (R), une bleue (B) et une jaune (J). On tire 3 boules **simultanément**. Déterminer le nombre de tirages possibles.

✓ Solution

L'ordre ne compte pas : $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$.

Vérification : $\{V, R, B\}, \{V, R, J\}, \{V, B, J\}, \{R, B, J\}$. ✓

Exercice 7 Comité avec contraintes

Un groupe est composé de 8 hommes et 5 femmes. On forme un comité de 4 personnes.

1. Sans contrainte.
2. Avec exactement 2 femmes.
3. Avec **au moins** 1 femme.

✓ Solution

1. $C_{13}^4 = 715$
2. $C_5^2 \times C_8^2 = 10 \times 28 = 280$
3. Total – aucune femme = $715 - C_8^4 = 715 - 70 = 645$

8 Propriétés des coefficients binômiaux

Propriétés fondamentales

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
3. $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$
4. **Symétrie** : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket : C_n^k = C_n^{n-k}$
5. **Formule de Pascal** : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

8.1. La propriété de symétrie

Exemple

Choisir 3 éléments parmi 10 revient à *rejeter* 7 éléments :

$$C_{10}^3 = C_{10}^7 = 120$$

La symétrie permet souvent de **simplifier les calculs**.

8.2. La formule de Pascal

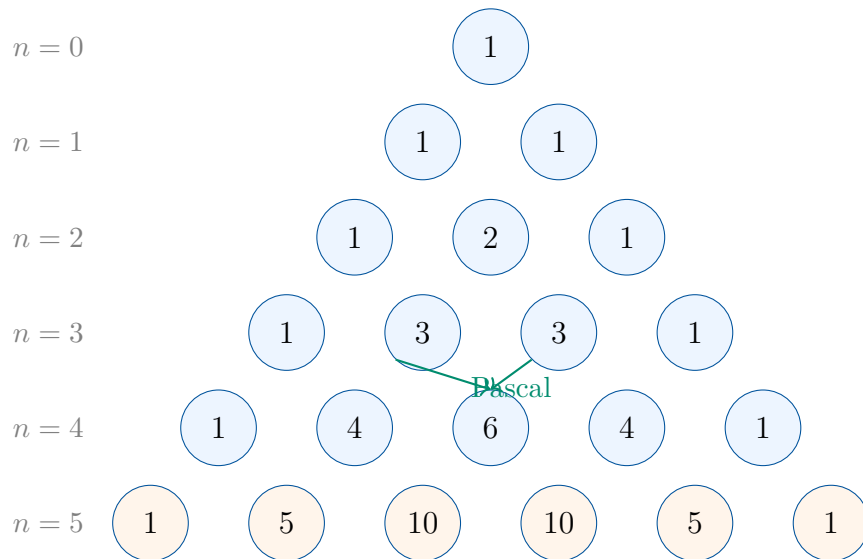
Formule de Pascal

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Interprétation : On fixe un élément particulier x dans un ensemble de $n + 1$ éléments. Pour choisir $k + 1$ éléments :

- Soit x est inclus : on choisit k parmi les n autres $\Rightarrow C_n^k$
- Soit x est exclu : on choisit $k + 1$ parmi les n autres $\Rightarrow C_n^{k+1}$

8.3. Triangle de Pascal



Exercice 8

Compléter la ligne $n = 5$ du triangle de Pascal en utilisant la formule de Pascal. Retrouver les valeurs C_5^k pour $k = 0, 1, \dots, 5$.

✓ Solution

À partir de la ligne $n = 4$: 1, 4, 6, 4, 1, on obtient la ligne $n = 5$:

$$1, 1 + 4 = 5, 4 + 6 = 10, 6 + 4 = 10, 4 + 1 = 5, 1 \implies 1, 5, 10, 10, 5, 1$$

9 Binôme de Newton

9.1. Formule

Théorème Formule du binôme de Newton

Pour tous réels a, b et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

ou de façon équivalente :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Cas particulier : $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$

Exemple *Développements classiques*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Les coefficients sont exactement les lignes du triangle de Pascal.

💡 Méthode Développer $(a + b)^n$

1. Lire la ligne n du triangle de Pascal : $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$.
2. Les puissances de a **décroissent** de n à 0.
3. Les puissances de b **croissent** de 0 à n .
4. La somme des deux exposants vaut toujours n .

Exercice 9

Développer les expressions suivantes :

1. $(a + b)^6$ 2. $(a + b)^7$ 3. $(1 + x)^5$ 4. $(2x - 1)^4$

✓ Solution

1. $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

2. $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

3. $(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

4. $(2x - 1)^4$: poser $a = 2x$, $b = -1$:

$$\begin{aligned} &= (2x)^4 + 4(2x)^3(-1) + 6(2x)^2(-1)^2 + 4(2x)(-1)^3 + (-1)^4 \\ &= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

9.2. Identités remarquables issues du binôme

Identités importantes

En appliquant le binôme de Newton avec des valeurs particulières :

$$x = 1 : \quad \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad (\text{somme des coefficients})$$

$$x = -1 : \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad (\text{somme alternée})$$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.

✓ Solution

1. On applique $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ avec $x = 1$: $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$.
CQFD
2. On applique la même formule avec $x = -1$: $(1-1)^n = 0^n = 0 = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k$.
CQFD

9.3. Identité remarquable $a^n - b^n$

Identité remarquable

Pour tous réels a, b et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Cas particulier : $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

Exercice 11

Développer : (1) $a^5 - b^5$ (2) $a^6 - b^6$ (3) $a^{10} - b^{10}$

✓ Solution

1. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
2. $a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$

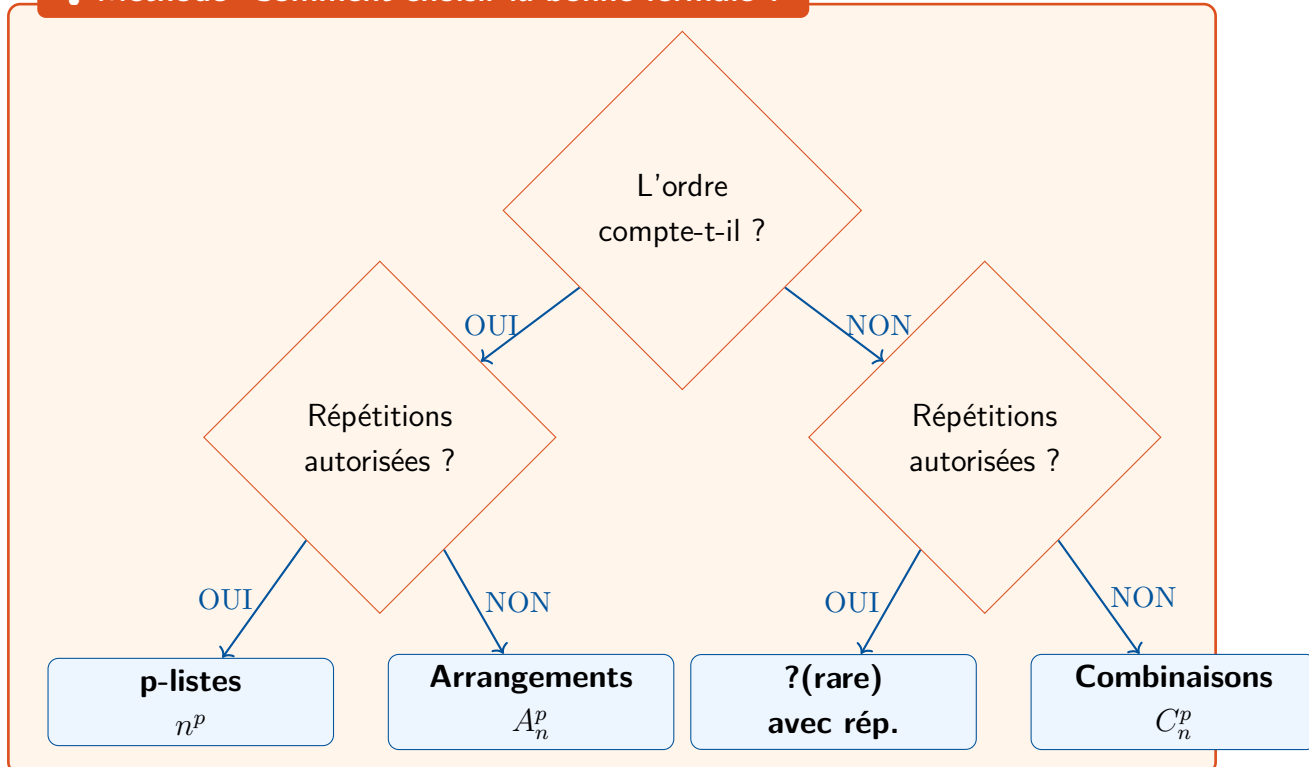
$$3. a^{10} - b^{10} = (a - b) \sum_{k=0}^9 a^k b^{9-k}$$

10 Tableau récapitulatif Choisir la bonne formule

Récapitulatif Les quatre situations fondamentales

Situation	Ordre	Répétition	Description	Formule
p-listes (k-uplets)	Oui	Oui	Listes de p éléments, les répétitions autorisées	n^p
Arrangements	Oui	Non	Listes ordonnées de p éléments distincts	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutations	Oui	Non	Arrangement utilisant tous les éléments ($p = n$)	$n!$
Combinaisons	Non	Non	Sous-ensembles de p éléments (ordre indifférent)	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

💡 Méthode Comment choisir la bonne formule ?



11 Exercices de synthèse

Exercice 12 Mots de lettres

On dispose des lettres $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ (7 lettres).

- Combien de mots de 4 lettres **distinctes** peut-on former ?
- Combien de ces mots **commencent par A** ?
- Combien de **sous-ensembles** de 4 lettres peut-on former ?

✓ Solution

- Ordre compte, pas de répétition : $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \mathbf{840}$.
- La 1^{re} lettre est fixée (A), 3 lettres parmi 6 restantes : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = \mathbf{120}$.
- Ordre indifférent : $C_7^4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} = \mathbf{35}$.

Exercice 13 Chemins dans une grille

Dans une grille de 4 colonnes et 6 lignes, combien de chemins mènent du coin bas-gauche au coin haut-droit, en se déplaçant uniquement **à droite** ou **vers le haut** ?

✓ Solution

Tout chemin contient exactement 3 déplacements à droite (D) et 5 vers le haut (H), soit 8 déplacements. On choisit les positions des 3 déplacements D parmi 8 :

$$C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = \mathbf{56} \text{ chemins}$$

Exercice 14 Codes PIN

1. Combien de codes PIN de 4 chiffres (de 0 à 9) existent-ils ?
2. Combien en existe-t-il si tous les chiffres doivent être **distincts** ?
3. Combien commencent par 1 ou 2 (chiffres distincts) ?

✓ Solution

1. Ordre compte, répétitions autorisées : $10^4 = \mathbf{10\,000}$.
2. Ordre compte, pas de répétition : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \mathbf{5\,040}$.
3. Premier chiffre $\in \{1, 2\}$: 2 choix, puis 3 chiffres distincts parmi 9 : $2 \times A_9^3 = 2 \times 9 \times 8 \times 7 = \mathbf{1\,008}$.

Exercice 15 Identité combinatoire

Montrer que pour $1 \leq k \leq n$:

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$$

✓ Solution

Preuve algébrique :

$$k C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! ((n-1)-(k-1))!} = n C_{n-1}^{k-1}$$

Interprétation combinatoire : former un comité de k personnes parmi n , puis désigner un président dans ce comité.

- Méthode 1 : choisir le comité (C_n^k façons), puis le président (k façons).
- Méthode 2 : choisir le président (n façons), puis les $k-1$ membres restants (C_{n-1}^{k-1} façons).

Les deux méthodes comptent la même chose. ■

Formules essentielles Fiche récapitulative

Formules à retenir

Notion	Description	Formule
Cardinal	Nombre d'éléments d'un ensemble fini E	$\text{card}(E)$
Factorielle	Produit des entiers de 1 à n	$n! = n(n-1) \cdots 1$
p-listes	Listes ordonnées avec répétition	n^p
Arrangements	Listes ordonnées sans répétition	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutations	Arrangement complet ($p = n$)	$n!$
Combinaisons	Choix non ordonné sans répétition	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Symétrie	Choisir k = rejeter $n - k$	$C_n^k = C_n^{n-k}$
Pascal	Relation de récurrence	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
Somme	Somme de toute une ligne	$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$
Binôme de Newton	Développement de $(a+b)^n$	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$
Inclusion-exclusion	Union de deux ensembles	$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvant pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard.

— Henri Poincaré (1854–1912)
